مقدمة
في التبولوجيا

الدكتور غفار حسين موسى

أستاذ مساعد قسم الرياضيات

كلية العلوم - جامعة الزرقاء الأهلية

دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة

المقدمة

إن علم التبولوجيا تمتد جذوره إلى عصر الحضارة الإغريقية ، حيث قام الإغريق بدراسة مفهوم الاستمرارية (continuous)، لكن علم التبولوجيا لم يظهر بوضعه الحالي إلا في بداية مطلع هذا القرن حين نشر فرشيه (Frechet) عام 1906 أطروحته التي تناولت اقتران (function) المسافة والعلاقة بينه وبين مفهوم الاستمرارية لكن العالمين ريز Riesz وهاوسدورف (Haus-dorff) بينا فيما بعد أن لا ضرورة لهذا الاقتران ويمكن دراسة الاستمرارية دون الرجوع إلى اقتران المسافة وبهذا ظهر ما يسمى بعلم التبولوجيا العامة .

بشكل عام إن أي مجموعة تحقق عناصرها بعض الفرضيات تكوّن نظاما رياضيا يكون متناسقا (consistent) إذا كانت مبرهناته ونتائجه وفرضياته غير متناقضة (هذا الأسلوب ولد قديما في موضوع الهندسة الاقليدية)، في السنوات الأخيرة تطورت الرياضيات بصورة سريعة بعد أن عرفت نظرية المجموعات في مطلع القرن العشرين، حيث أن أي مجموعة تحقق عناصرها فرضيات معينة تسمى جملة رياضية محققه للفرضيات وفي هذه الحالة يوجد اكثر من نظام رياضي مثل الزمر-(groups) الحلقات (rings) – الهندسة الاقليدية (Euclidean geometry) – الفضاءات المترية (metric spaces) – الفضاءات التوبولوجية (topological spaces)... الخ .

في هذا الكتاب سنتطرق الى موضوع الفضاءات التبولوجية ولكن قبل ذلك أود أن أشير إلى مشكلة رئيسية هي "التصنيف" وهذه المشكلة موجودة في غالبية العلوم إن لم تكن في جميع العلوم وبهذا فهي أحد المشاكل الرئيسة في علم الرياضيات هنا أود أن أتطرق إلى كيفية معالجتها في موضوع التبولوجيا .

يمكن تعريف فرضيات التبولوجي على أي مجموعة لكن هذه المجموعات لا تمتلك جميعها صفات متشابهة أو يمكن القول ليست " متكافئة تبولوجيا " (homeomorphic) لذا فان تصنيف هذه المجموعات من منظور تبولوجي يتطلب منا تعريف اقتران بين المجموعات المتكافئة تبولوجيا الذي أسميناه اقتران التكافؤ التبولوجي (homeomorphism).

إن خاصية هذا الاقتران هي تصنيف الفضاءات التبولوجية دون الرجوع إلى نوع المجموعات المكونة لهذه الفضاءات ولكن ليس من السهل الحصول على هذا الاقتران الذي

يصنف الفضاءات التبولوجية . وإذا وجد مثل هذا الاقتران بين فضائيين فان هذين الفضائيين سوف يمتلكان صفات تبولوجية متشابهة ، وبسبب صعوبة إيجاد مثل هذا الاقتران استعين بفصل الفضاءات التبولوجية باستخدام صفات تبولوجية (topological properties) ولكن هذه الصفات لن تنهي مشكلة التصنيف " بعبارة أخرى ان كل فضاءين لا يمتلكان نفس الصفات التبولوجية غير متكافئين تبولوجيا يعود ذلك إلى إن اقتران التكافؤ التبولوجي ينقل الصفات التبولوجية بين الفضاءات " ومع ذلك فان هذه الصفات لن تفي بالغرض لان الفضاءات التي تمتلك صفات تبولوجية متشابهة ليس بالضرورة متكافئة تبولوجيا لذا أدخلت صفات جبرية وتفاضلية على الفضاءات التبولوجية وأحد من أسباب تعريف الصفات الجبرية والتفاضلية على الفضاءات التبولوجية هي لزيادة عملية التصنيف وبهذا أنشأ موضوعا التبولوجيا الجبرية (Algebraic Topology) والتبولوجيا التفاضلية (Differential Topology).

في هذا الكتاب حاولت عرض موضوع التبولوجي بطريقة مبسطة وبدون التعمق في بعض المفاهيم لكي يستفاد منها الطالب في المرحلة الجامعية الأولى وللتعرف على الأفكار الأساسية في هذا الحقل من حقول الرياضيات .

ان دراسة هذا الكتاب لا تتطلب من القارئ الى معلومات كثيرة في مواضيع الرياضيات الاخرى سوى بعض المفاهيم الأساسية في نظرية المجموعات والتي قد تطرقنا اليها وبشكل مختصر في الفصل الأول . اما الفصل الثاني تناولنا فيه موضوع الفضاءات المترية والتي هي الاخرى قديمة التكوين ويتعرض اليها الطالب في المرحلة الجامعية في مواضيع عديدة ومنها التحليل الحقيقي . من جانب آخر ان الفضاءات المترية يمكن اعتبارها أمثلة محسوسة للفضاءات التبولوجية وبذلك تمكن الطالب من فهم الفضاءات التبولوجية بطريقة هندسية . في الفصل الثالث تناولنا وبشيء من التفصيل مفهوم الفضاءات التبولوجية وطرحنا الأفكار الأساسية في هذا الموضوع وبالتحديد تطرقنا الى ماهية الفضاء التبولوجي وكيفية بناءه على مجموعة ما ومفهوم القاعدة (base) فيه . كذلك تعرضنا إلى أنواع النقاط في الفضاء التبولوجي وبعد ذلك تعرضنا الى الاقترانات الموجودة بين الفضاءات التبولوجية والمتتاليات (sequences) كما تناولنا مفهوم الفضاءات الجزئية (subspaces) وفضاء الجداء للفضاءات التبولوجية (product space) وأخيرا ختمنا الفصل بموضوع فضاءات القسمة (quotient space). اما الفصل الرابع فعرضنا فيه بعض الأنماط من الفضاءات التبولوجية

والتي تتصف بصفتي الانفصال وقابلية العد الاولى والثانية وهذه الصفات تعرفنا على قابلية انفصال نقطتين او نقطة ومجموعة مغلقة او مجموعتين مغلقتين كذلك معرفة المجموعات المفتوحة الحاوية لنقطة بالفضاء وعدد عناصر القاعدة . الفصل الخامس تناولنا فيه خاصية أخرى مهمة وهي خاصية الترابط (connectedness) ومفهوم الفضاءات المترابطة محليا (locally connected spaces) ومركبات الفضاء التبولوجي (components) واخيرا الفضاءات المترابطة مساريا (path connected) والعلاقة بين هذه الأنواع من الفضاءات . اما الفصل السادس فكان نصيبه خاصية اخرى من خواص الفضاءات التبولوجية وهي خاصية التراص (compactness) وبعض توابعها من تراص محلي (locally compact) وجداء الفضاءات المتراصة ويجدر الاشارة هنا ان هذه الخاصية لها امتدادات كثيرة والتي تركناها هنا ويمكن للقارئ دراستها اذا كان مهتم بهذه الخاصية في كتب اخرى مثل [11]، [4]. اما الفصل السابع فقد تطرقنا فيه الى جزء يسير من مفهوم نظرية الهوموتبيا (homotopy theory) والتي تشكل جزءا مهما من موضوع التبولوجيا الجبرية والهدف من ذكر هذا الموضوع هو تعريف القارئ على كيفية بناء الزمرة الهوموتبية الأساسية (Fundamental homotopy group) ذات البعد الأول على الفضاء التبولوجي واخيرا قمنا باعطاء مثال لحساب مثل هذه الزمرة على الدائرة.

وفي الختام أتقدم بجزيل الشكر والتقدير للأستاذ الدكتور صباح عبد العزيز السماوي من جامعة البصرة – الجمهورية العراقية لمراجعته الفصليين الأول والثاني وإبداء ملاحظاته حولهما . كذلك أتقدم بجزيل الشكر الى زملائي الدكتور راضي إبراهيم محمد من جامعة آل البيت – المملكة الأردنية الهاشمية والدكتور سليم عيسى مسعودي من جامعة الملك فهد للبترول والمعادن – المملكة العربية السعودية لمراجعتهم جميع فصول الكتاب وإبداء ملاحظاتهم العلمية واللغوية القيمة .

آمل أن يكون هذا الجهد البسيط ذو فائدة تعود على الطلبة من ناحية وعلى مسيرة التعريب من جهة أخرى . وأخيرا يسعدني أن أتلقى أي ملاحظات أو نقد حول الكتاب من شأنه تحسين محتواه إذا شعر القارئ بذلك والله ولي التوفيق .

المؤلف

المحتويات

الفصل الأول

مراجعة في نظرية المجموعات

مراجعة في نظرية المجموعات

نظرا لأهمية نظرية المجموعات في كافة حقول الرياضيات ، وخاصة حقل التبولوجيا فسوف نتطرق لهذا الموضوع وبشكل مختصر للتعرف على بعض المفاهيم التي نحتاج اليها في موضوعاتنا القادمة .

إن أول عالم رياضي طرح هذا الموضوع هو العالم الألماني كانتور حيث عرض هذا الموضوع بشكل متطور وبعده قام العالم هاوسدورف بوضع لغة هذه النظرية كما هي الآن في كتابه " نظرية المجموعات " عام 1937 .

في بداية القرن العشرين اعتقد بعض علماء الرياضيات وجود بعض التناقضات في هذه النظرية عند استخدام المنطق الرياضي لكن العالم غودل برهن على عدم وجود مثل هذا التناقض عام 1940 .

يتضمن هذا الفصل مفهوم المجموعات والعمليات الجبرية عليها كذلك تعريف الاقتران (function) باستخدام مفهوم العلاقات (Relations) واخيرا موضوع المجموعات القابلة للعد و غير القابلة للعد (Countable and Uncountable sets) باستخدام مفهوم المجموعات المنتهية و غير المنتهية (Finite &Infinite sets) .

1.1 : المجموعات والعمليات عليها

لتكن A مجموعة ما ، يرمز للعنصر a الذي ينتمي للمجموعة A بالرمز $a\in A$، ويرمز للعنصر b الذي لا ينتمي للمجموعة A بالرمز $b\notin A$. يقال للمجموعة A بأنها جزئية من المجموعة B إذا وفقط إذا كان لكل عنصر $a\in A$ فإن $a\in B$ ويرمز لها بالرمز $A\subseteq B$. فمثلا مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية 2Z جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة Z. إن المجموعة الخالية والتي يرمز لها بالرمز ϕ هي مجموعة جزئية من أي مجموعة ، كذلك إن كل مجموعة جزئية من نفسها ويقال إن المجموعة A جزئية فعلية (Proper subset) من المجموعة B إذا كانت A جزئية من B ويوجد على الأقل عنصر $b\in B$ وان $b\notin A$.

تعريف 1.1.1 : لتكن كل من A , B مجموعة ما فان :

1) تقاطع (Intersection) A مع B تمثل المجموعة التي تحتوي على العناصر المشتركة بين A , B ويرمز لها بالرمز $A\cap B$ أو $A\cap B=\{x:x\in A, x\in B\}$

1)اتحاد (Union) A مع B يمثل مجموعة العناصر الموجودة في A أوB ويرمز لها بالرمز $A \cup B$ أو $A\cup B = \{x:x\in A$ أو $x \in B\}$

3) الفرق (Deference) بين A و B ويرمز لها بالرمز $A - B$ تمثل المجموعة التي عناصرها تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B أي $A - B=\{x:x\in A, x\notin B\}$.

مبرهنة 2.1.1 : لتكن C,B,A مجموعات فان :

1) $A\cup B = B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$ " تسمى هذه الخاصية بالخاصية التبديلية "

(Commutative property)

2) $(A\cup B) \cup C=A \cup (B\cup C),\ A \cap (B\cap C)=(A\cap B) \cap C$

" تسمى هذه الخاصية بالخاصية التجميعية " (Associative property) .

3) $A\cup (B\cap C) =(A\cup B) \cap (A\cup C)$

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B) \cup (A\cap C)$ ("تسمى هذه الخاصية بالخاصية التوزيعية "

(Distributive property). #

ترميز : تسمى المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر لمجموعات معينة بالمجموعة الشاملة ويرمز لها بالرمز U.

إذا كانت Aمجموعة جزئية من U فان متممة (Complement) A هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى U ولا تنتمي إلى A ويرمز لها بالرمز $C(A)$ أو $U - A$. واضح إن $C(A)$ مجموعة جزئية من U وإن $C(C(A)) =A$.

مبرهنة 3.1.1 : لتكن كل من A ، B مجموعة جزئية من U فان :

1) $C(A\cup B) = C(A) \cap C(B)$

2) $C(A\cap B) = C(A) \cup C(B)$

" تسمى هذه المبرهنة بمبرهنة دمورغن " "DeMorgan" #

تعريف 4.1.1 : لتكن I مجموعة ما بحيث إن لكل عنصر i من I توجد مجموعة A_iجزئية

من المجموعة A فان مجموعة المجموعات الجزئية من A المعرفة بعناصر المجموعة I تسمى أسرة مجموعات جزئية مرقمة (Indexed Family set) ويرمز لها بالرمز $\{A_i\}_{i\in I}$ كذلك يرمز لاتحاد مثل هذه المجموعات بالرمز

$\bigcup_{i\in I} A_i$ ولتقاطع مثل هذه المجموعات بالرمز $\bigcap_{i\in I} A_i$. وتسمى المجموعة I بمجموعة الدليل (Index set).

يمكن الآن النظر إلى مبرهنة دمورغن بالصورة العامة على اسر المجموعات المرقمة :

مبرهنة 5.1.1: لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ أسرة مجموعات مرقمة فان :

$$\bigcap_{i\in I} (C(A_i))=C(\bigcup_{i\in I} A_i)$$

$$C\ (\bigcap_{i\in I}(A_i))=\bigcup_{i\in I} (C(A_i))$$

#

لغرض تعريف الجداء بين مجموعتين يجب أن نتطرق إلى معنى الأزواج المرتبة .

ليكن، a , b عنصريين ينتميان إلى المجموعة A، B على التوالي فان الرمز (a , b) يسمى زوج مرتب (Ordered pair) وإن a يدعى بالعنصر الأول في الزوج المرتب و b بالعنصر الثاني .

تعريف 6.1.1 : لتكن كل من B , A مجموعة فان الجداء AxB هي مجموعة الأزواج المرتبة (a , b) بحيث إن $a\in A$ و $b\in B$ أي

$$AxB=\{(a,b):a\in A ,b\in B\}$$

واضح أن $BxA \neq AxB$ بصورة عامة كذلك يمكن تعميم الجداء بين اكثر من مجموعتين باستخدام المرتب النوني . إذا كانت B = A فيرمز للجداء بالرمز AxA أو A^2 وبشكل عام $A\ x\ A\ x\ ...\ x\ A = A^n$ (n من المرات).

2.1 : العلاقات و الاقترانات

لتكن كل من B, A مجموعة وإن Q مجموعة جزئية من الجداء AxB فان Q تسمى علاقة من A إلى B. إذا كانت Q تحتوي على العنصر (a , b) فيقال أن العنصر a مرتبط بالعلاقة Q مع العنصر b ويكتب بالشكل a Q b ايضا . أما إذا كانت Q مجموعة جزئية من الجداء A^2 فيقال أن Q علاقة على A.

تعريف 1.2.1 : لتكن Q علاقة على المجموعة A:

1) تسمى العلاقة Q انعكاسية (Reflexive) إذا وفقط إذا لكل عنصر a ينتمي إلى A فان $a\,Q\,a$.

2) تسمى العلاقة Q متناظرة (Symmetric) إذا وفقط إذا لكل $a , b \in A$ تحقق $a\,Q\,b$ فان bQa.

3) تسمى العلاقة Q متعدية (Transitive) إذا وفقط إذا لكل $a , b, c, \in, A$ ولدينا $a\,Q\,b$ و $b\,Q\,c$ فان $a\,Q\,c$.

4) تسمى Q علاقة تكافؤ (Equivalence relation) إذا وفقط إذا كانت Q انعكاسية ومتناظرة ومتعدية .

مثال : لتكن Q علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z بالشكل الأتي

$Q = \{ (n,m) \in Z \times Z : (n\ m) / 3 = k$ حيث k أي عدد صحيح} يمكن البرهنة على إن Q علاقة تكافؤ على Z.

إذا كانت Q علاقة تكافؤ على المجموعة A وإن a عنصر ما في A فان مجموعة العناصر المكافئة للعنصر a (المرتبطة بالعلاقة Q مع a) تسمى بالصف التكافؤي (Equivalence class) للعنصر a ويرمز له بالرمز [a] أو A_a أي إن :

$$A_a = [a] = \{ x \in A : (x,a)\in Q\}$$

ويمكن تعريف مجموعة القسمة (Quotient set) هي مجموعة صفوف التكافؤ أي

$$A/Q = \{[a]: a \in A\}$$

تعريف 1 . 2 . 2: لتكن A مجموعة ما وأن $\{A_i\}_{i\in I}$ اسرة من المجموعات الجزئية منA. تسمى الأسرة $\{A_i\}_{i\in I}$ تجزءة للمجموعة A اذا تحققت الشروط الآتية:

1) $A = \cup A_i$.

2) $A_i \cap A_j = \phi$ اذا كان $i \neq j$.

يلاحظ من المثال أعلاه بان العلاقة Q جزئت المجموعة Z إلى ثلاثة صفوف تكافؤ هي [0]

، [1], [2] . أن مجموعة صفوف التكافؤ تشكل تجزئة للمجموعة المعرفة عليها علاقة التكافؤ ، لان أي صفيين تكافئيين لا يتقاطعان. هذا يقودنا إلى أن أي علاقة تكافؤ على مجموعة ما تعطي تجزئة لتلك المجموعة والعكس صحيح حيث أن أي تجزئة لمجموعة ما ممكن الحصول على علاقة تكافؤ ناتجة من التجزئة وهذه هي إحدى المبرهنات الواضحة في نظرية المجموعات.

مبرهنة 3.2.1: لتكن Q علاقة معرفة على المجموعة A فإن Q علاقة تكافؤ اذا وفقط توجد تجزءة على المجموعة A ناتجة من العلاقة Q.

مبرهنة 4.2.1 : لتكن Q علاقة تكافؤ على المجموعة A فان :

1) $a\,Q\,b$ إذا وفقط إذا $[a] = [b]$.

2) إذا كانت $[a] \cap [b] \neq \phi$ فان $[a] = [b]$. #

تعريف 5.2.1 : لتكن Q علاقة معرفة على المجموعة A. يقال للعلاقة Q ضد متناظرة (Anti symmetric) إذا و فقط إذا كان $a\,Q\,b$ و $b\,Q\,a$ فان $a = b$.

إذا كانت Q علاقة على المجموعة A بحيث أن Q انعكاسية وضد متناظرة ومتعدية فتسمى Q علاقة ترتيب جزئي (Partially ordered relation) على A وتسمى المجموعة A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة Q وسنرمز للمجموعة المرتبة جزئيا بالثنائي (A, Q). المجموعة A تسمى مرتبة كليا (Linearly ordered) بالعلاقة Q إذا وفقط إذا Q علاقة ترتيب جزئي على A وأن لكل عنصريين $a, b \in A$ فان $a\,Q\,b$ أو $b\,Q\,a$. يمكن البرهنة على أن مجموعة الأعداد الحقيقية مع العلاقة اصغر من أو يساوي ($\leq$) مجموعة مرتبة كليا .

تعريف 6.2.1 : لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة Q (لنأخذ العلاقة $\leq$ بدلا من Q لاعطاء صيغة اسهل للتعريف) ولتكن $B \subseteq A$ و $a \in A$. نسمي a قيد أعلى (upper bound) للمجموعة B إذا وفقط إذا لكل $b \in B$ فان $b \leq a$، ويسمى العنصر a قيد ادنى (Lower bound) للمجموعة B إذا وفقط إذا لكل عنصر $b \in B$ فان $a \leq b$. نسمي القيد الأعلى a بأصغر قيد أعلى إذا كان a اصغر عنصر من عناصر القيود العليا ونسمي القيد الأدنى a بأكبر قيد أدنى إذا كان a اكبر القيود الدنيا .

تعريف 7.2.1 : لتكن كل من A , B مجموعة و f علاقة من A إلى B نسمي العلاقة f بالاقتران إذا وفقط إذا لكل عنصر $a \in A$ يوجد عنصر وحيد $b \in B$ بحيث أن $(a,b) \in f$ وتكتب بالشكل

$f(a) = b$. ويرمز للاقتران بالرمز $f: A \longrightarrow B$ إذا كان f اقتران من A إلى B فان المجموعة G المتمثلة بالعناصر $G = \{ (a,f(a)) \in A \times B : a \in A\}$ تسمى ببيان (Graph) الاقتران f.

مثال 1 : لتكن $A = \{0,1,3\}$ و $B = \{1,3,7,8\}$ فأنه توجد مجموعة من الاقترانات من المجموعة A الى المجموعة B وعلي سبيل المثال واحد من هذه الاقترانات هو

$f(3) = 3$, $f(1) = 7$, $f(0) = 1$. واضح أن بيان f هي المجموعة

$$G = \{(0,1) , (1,7) , (3,3)\}.$$

من جانب آخر فإن العلاقة Q والتي عناصرها هي $\{(0,1), (0,3), (3,7)\}$ ليست اقتران والسبب في ذلك لأن ليس جميع عناصر A مرتبطة مع عناصر من B كذلك أن العدد صفر مرتبط بعنصرين.

لتكن $f: A \longrightarrow B$ اقتران و A_1 مجموعة جزئية من A فان $f(A_1)$ مجموعة جزئية من B عناصرها بالشكل $f(a)$ حيث $a \in A_1$ وتسمى المجموعة $f(A_1)$ صورة (Image) المجموعة A_1 بالاقتران f إذا كانت $B_1 \subseteq B$ فان المجموعة $f^{-1}(B_1)$ عناصرها من نوع $a \in A$ بحيث إن $f(a) \in (B_1)$ وهي مجموعة جزئية من A، تسمى المجموعة $f^{-1}(B_1)$ بمعكوس الصورة (Inverse image) للمجموعة B_1 (ليس بالضرورة أن تكون العلاقة f^{-1} اقتران).

مثال2 :ليكن $f : R \longrightarrow R$ اقتران (حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية) معرفة على النحو $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ولتكن $[1 ,2]$ فترة مغلقة من R فان $[-4 , -3]$ صورة للفترة المغلقة $[1,2]$، بالاقتران f أي أن $f([1,2]) = [-4 , -3]$. نأخذ الفترة المغلقة $[-3, 0]$ فان $f^{-1}([-3 , 0])$ تمثل اتحاد الفترتين المغلقتين . $[2 , 3]$, $[-1 ,0]$

الأن نتطرق الى مبرهنة نستخدمها في الفصل الثالث وهي كالآتي:

مبرهنة 9.2.1: ليكن $f: A \longrightarrow B$ اقتران وأن $\{A_i\}_{i \in I}$ عائلة مجموعات جزئية مرقمة من A فإن:

$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ (1

$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ (2

البرهان:1) ليكن $b\in f(\bigcup_{i\in I} A_i)$ هذا يعني وجود عنصر $a\in \bigcup_{i\in I} A_i$ بحيث أن $f(a) = b$ لذلك

فإن توجد مجموعة A_j تحتوي على العنصر a وبذلك فإن $b\in f(A_j)$ هذا يعني أن

$b\in \bigcup f(A_i)$. أي أن $\bigcup f(A_i) \subseteq f(\bigcup A_i)$ وبالعكس يترك كتمرين للطالب.

2) نفرض أن $b\in f(\bigcap A_i)$ هذا يؤدي الى وجود عنصر $a\in \bigcap A_i$ لكل i بهذا فإن

$b = f_{(a)} \in f_{(Ai)}$. هذا يعني أن $b\in \bigcap f(A_i)$.

نلاحظ أن المساواة في (2) من البرهنة اعلاه غير صحيحة كما في المثال الآتي:

مـثـال: لتكن $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$ وأن $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{1,2,4\}$ فـإن $A_1\cap A_2 = \{1,2\}$ نفرض أن $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3)= f(4) = c$ فأن $f(A_1\cap A_2) = \{a,b\}$ بينما $f(A_1)\cap f(A_2) = \{1,2,3\}$.

تعريف 8.2.1: ليكن $f:A\longrightarrow B$, $g: B\longrightarrow C$ اقترانين فان الرمز gof يسمى تركيب (Com-position) الاقترانين f و g ويعرف بالصيغة الآتية :

لكل $a \in A$ فان $gof(a) = (gof)(a)$. يمكن إجراء عملية التركيب لاكثر من اقترانين ولكن وفق شروط تركيب الاقترانات .

إذا كـانت كل من $f :A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow A$ اقـتـران . يقـال بان الاقـتـران g مـعكوس الاقتران f إذا وفقط إذا لكل عنصر $a\in A$ فان $g(f(a)) = a$ ولكل عنصر $b\in B$ فان $f(g(b)) = b$.

تعريف10.2.1: لتكن كل من A, B مـجـمـوعة و D مـجـمـوعة جـزئـية من A وليكن $f : D\longrightarrow B$, $F:A \longrightarrow B$ اقـتـرانـين . إذا كـان لـكل عـنـصـر $d \in D$, $f(d)=F(d)$ فـان F يسـمـى تـمـديـد (Extension) للاقـتـران f عـلـى المجـمـوعـة A. و يسـمــى f مــقـصــور (Restriction) الاقتران F على المجموعة D ويرمز لمقصور الاقتران بالرمز $f = F|_D$.

سوف نتطرق إلى بعض أنواع من الاقترانات التي سنتعرض أليها فيما بعد :

1) ليكن $f : A \longrightarrow B$ اقتران . يسمى f اقتران متباين (او احادي) (Injective) إذا وفقط إذا لكل عنصريين a_1, a_2 ينتميان إلى A وإن $f(a_1) = f(a_2)$ فان $a_1 = a_2$. إن جميع الاقترانات الخطية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية والتي تكتب بالشكل $f(x) = ax + b$ (حيث a,b اعداد حقيقية وان $a \neq 0$) هي اقترانات متباينة .

2) ليكن $f : A \longrightarrow B$ اقتران . يسمى f اقتران شامل (Surjective) إذا وفقط إذا لكل عنصر $b \in B$ يوجد على الأقل عنصر واحد $a \in A$ بحيث إن. $f(a) = b$ من الواضح أن الاقترانات الخطية الآنفة الذكر هي اقترانات شاملة أيضا .

3) ليكن $f : A \longrightarrow B$ اقتران . يسمى f اقتران تقابلي (Bi jective) إذا وفقط إذا كان f اقتران متباين وشامل .

4) لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة B وليكن$i : A \longrightarrow B$ اقتران بحيث إن لكل $a \in A$ فان $i (a) = a$. يسمى الاقتران i باقتران الاحتواء (Inclusion) . واضح إن اقتران الاحتواء اقتران متباين .

5) لتكن A مجموعة ما وإن $I: A \longrightarrow A$ اقتران . يسمى I بالاقتران الذاتي(Identity) إذا وفقط إذا لكل $a \in A$ فان $I (a) = a$ ويرمز له بالرمز I_A للدلالة على المجموعة المعرفة عليها. من الواضح إن الاقتران الذاتي اقتران تقابلي .

6) لتكن كل من A, B مجموعة غير خالية بحيث ان عدد عناصر A اقل من او يساوي عدد عناصر B فان الاقتران المتباين من A إلى B يسمى اقتران الغمر (Embedding) .

7) لتكن كل من A, B مجموعة فان الاقتران $c : A \longrightarrow B$ يسمى بالاقتران الثابت (Constant) إذا وفقط إذا لكل $a \in A$ فان $c (a) = b$ حيث b عنصر ثابت من B.

8) لتكن Q علاقة تكافؤ على المجموعة A وليكن $q : A \longrightarrow A/Q$ اقتران بحيث أن لكل عنصر $a \in A$ فان $q(a) = [a]$. الاقتران q يسمى بالاقتران القانوني (Canonical). واضح إن الاقتران القانوني اقتران شامل .

9) لتكن كل من (A, Q) , (B,S) مجموعة مرتبة جزئيا و إن $f : A \longrightarrow B$ اقتران . يسمى f اقتران متماثل إذا وفقط إذا f اقتران محافظ على الترتيب (Preserve order) أي إن لكل

$a_1 , a_2 \in A$ فان $a_1 \, Q \, a_2$ اذا وفقط اذا $(f(a_1) \, S \, f(a_2))$ ، ويسمى الاقتران تشاكلي (Isomorphism) إذا كان متماثل و تقابلي .

10) لتكن كل من A_1,A_2 مجموعة غير خالية فان الاقترانين $A_1 \quad p_1 : A_1 \times A_2$, $A_2 \quad p_1 : A_1 \times A_2$ يسميان بالاقترانين الاسقاطيين (Projective) إذا كان لكل $(a_1,a_2) \in A_1 \times A_2$ لدينا $p_1(a_1,a_2) = a_1$, $p_2(a_1,a_2) = a_2$.
واضح أن الاقترانين p_1 , p_2 شاملان .

11) لتكن $d : R \times R \longrightarrow R$ اقتران حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن $(r_1,r_2) \in R \times R$ فان الاقتران d يسمى اقتران مسافة إذا كان $d\,(r_1,r_2) = |r_1 \quad r_2|$ (حيث الرمز | | يرمز للقيمة المطلقة للعدد الحقيقي) .

12) لتكن A مجموعة جزئية فعلية من B فان الاقتران $\chi_A : B \longrightarrow \{0,1\}$ يسمى بالاقتران المميز (Characteristic) للمجموعة A إذا وفقط إذا $\chi_A\,(x) = 1$ إذا كان $x \in A$ وإن $\chi_A\,(x) = 0$ إذا كان $x \in B - A$ أي

$$\chi_A\,(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in B - A \end{cases}$$

3.1 : المجموعات القابلة للعد وغير القابلة للعد

في هذا الجزء سوف نعطي تعريف المجموعات القابلة للعد والمجموعات غير قابلة للعد ولهذا الغرض يجب أن نعرف أولا المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية ، كذلك سوف نتعرض إلى بعض النتائج لهذه الأنواع وبشكل موجز .

تعريف 1.3.1: تسمى المجموعة A مجموعة غير منتهية إذا وفقط إذا توجد مجموعة جزئية فعلية B من A تكافؤ المجموعة A (أي إن يوجد اقتران تقابلي من A إلى B) . وغير ذلك تسمى مجموعة منتهية . واضح إن عناصر المجموعة المنتهية تقابل مجموعة من الأعداد الطبيعية (Natural numbers) $\{1,2, \ldots\ldots ,n\}$ او ϕ .

مثال: ان مجموعة الأعداد الصحيحة $Z = \{ \ldots\ldots \; -2, -1 , 0, 1 , 2, \ldots\ldots \}$ مجموعة غير منتهية والسبب في ذلك يمكن تعريف اقتران تقابلي f من المجموعة الجزئية الفعلية $2Z$ التي

تمثل الأعداد الزوجية الصحيحة الى المجموعة الكلية Z بالشكل $f(n) = (1/2)n$ لكل $n \in 2Z$.

مبرهنة 2.3.1 : المجموعة A تكون غير منتهية إذا وفقط إذا يوجد اقتران متباين $f: A \longrightarrow A$ بحيث إن $f(A) \neq A$. #

إذا كانت A مجموعة غير منتهية وإن a عنصر ما في A فان $A-\{a\}$ مجموعة غير منتهية وبشكل عام فان $A-\{a_1,a_2, ...,a_n\}$ مجموعة غير منتهية حيث $a_i \in A$ لكل $i \in \{1,2,...,n\}$ كذلك اتحاد عدد منته من المجموعات غير المنتهية هي مجموعة غير منتهية .

أما بالنسبة للمجموعات المنتهية فيمكن صياغة نتائج مشابهة لما ورد أعلاه ولكن بصورة تتلاءم مع تعريف المجموعة المنتهية ، فمثلا إذا كانت B مجموعة منتهية وإن b عنصر ما لا ينتمي الى B فان $B \cup \{b\}$ مجموعة منتهية ... الخ .

تعريف 3.3.1: تسمى المجموعة A مجموعة قابلة للترقيم (Numerable) إذا كانت مكافئة إلى مجموعة الأعداد الطبيعية، أي يوجد اقتران $f:A \longleftrightarrow N$ تقابلي . ومن هذا يمكن القول إن أي مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للترقيم تكون مجموعة منتهية أو مجموعة قابلة للترقيم . إذا كانت كل من A , B مجموعة قابلة للترقيم فان $A \times B$ مجموعة قابلة للترقيم.

تعريف 4.3.1: تسمى المجموعة A مجموعة قابلة للعد إذا وفقط إذا كانت A مجموعة منتهية أو قابلة للترقيم، وغير ذلك تسمى المجموعة غير قابلة للعد .

كذلك يمكن البرهنة على إن أي مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد تكون مجموعة قابلة للعد ، كذلك اتحاد عدد منته من مجموعات قابلة للعد تكون مجموعة قابلة للعد .

4.1 : أسئلة

1- لتكن $A_1, A_2, ... , A_n$ مجموعات غير خالية بحيث أن

$A_1 \subseteq A_2, A_2 \subseteq A_3, ..., A_{n-1} \subseteq A_n, A_n \subseteq A_1$. برهن إن

$A_1 = A_2 = ... = A_{n-1} = A_n$.

2- لتكن كل من A, B مجموعة جزئية من X فان :

أ) $A \subseteq B$ إذا و فقط إذا $A \cup B = B$.

ب) $A \subseteq C(B)$ إذا وفقط إذا $A \cap B = \phi$.

ج) $A \subseteq B$ إذا و فقط إذا $C(B) \subseteq C(A)$.

3 – لتكن كل من $\{B_i\}_{i \in I}$, $\{A_i\}_{i \in I}$ أسرتي مجموعات مرقمة . برهن إن :

أ) $\bigcup_{i \in I, j \in J} (C(A_i \cap B_j)) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (C(A_i) \cup C(B_j))$

ب) $\bigcap_{i \in I, j \in J} (C(A_i \cup B_j)) = \bigcap_{i \in I, j \in J} (C(A_i) \cap C(B_j))$

4 - لتكن كل من D,B, A مجموعة غير خالية بحيث إن $A \subseteq B \subseteq D$.

برهن إن : $D - (B - A) = A \cup (D - B)$

5 - لتكن $B \subseteq D$, $A \subseteq E$. برهن إن :

$C(A \times B) = (E \times C(B)) \cup (C(A) \times D)$

6 - ليكن f اقتران من المجموعة A إلى المجموعة B وإن $\{B_i\}_{i \in I}$ أسرة مجموعات جزئية مرقمة من B ولتكن E ,D مجموعتين جزئيتين من B برهن إن :

أ) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$, $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

ب) $f^{-1}(E - D) = f^{-1}(E) - f^{-1}(D)$.

ت) $f^{-1}(D) = \phi$ إذا وفقط إذا $f(A) \cap D = \phi$.

7 - لتكن $P(X)$ مجموعة جميع المجموعات الجزئية من المجموعة X وليكن B، A عنصرين من عناصر $P(X)-\{\phi\}$. برهن إن :

أ) العلاقة Q انعكاسية ومتناظرة ، ليست متعدية وليست ضد متناظرة إذا كانت Q معرفة بالشكل الأتي : $(A, B) \in Q$ إذا و فقط إذا $A \cap B \neq \phi$

ب) العلاقة Q انعكاسية و متعدية و ضد متناظرة و ليست متناظرة إذا كانت Q معرفة بالشكل الأتي : $(A, B) \in Q$ إذا و فقط إذا $A \subseteq B$.

ت) العلاقة Q تكون متناظرة فقط إذا كانت Q معرفة بالشكل الأتي : $(A, B) \in Q$ إذا

وفقط إذا $A = X - B$.

8 - لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R بحيث إن $1 \in A$ ولكل $a,b \in A$ فان $a + b \in A$ ولكل $x \in R$ فإن $x \in A$ أو $x \in A$ أو $x = 0$. عرف العلاقة Q بالشكل الأتي: $Q = \{ (a,b) R \times R : a, b \in A\}$ برهن إن Q علاقة متعدية .

9 - ليكن $f: A \longrightarrow B$ اقتران بحيث إن $f(A) = B$ ولتكن Q مجموعة جزئية من AxAبحيث إن لكل (a_1 , a_2) Q فان $f(a_1) = f(a_2)$. برهن إن Q علاقة تكافؤ على A.

10 - ليكن $g: A \longrightarrow B$ اقتران ولتكن $E \subseteq B$, $D \subseteq A$. برهن إن :

$$f(f^{-1}(E)) \subseteq E \ , \ \ D \subseteq f^{-1} (f(D))$$

11 - لتكن S , Q علاقتي تكافؤ على المجموعة A. هل إن $Q \cap S$, $Q \cup S$, $Q - S$ علاقات تكافؤ على A. أعط مثالا لكل حالة لا تحقق شروط علاقة التكافؤ، كذلك أعط الشروط الإضافية إلى كل علاقة ليست علاقة تكافؤ لكي تصبح علاقة تكافؤ .

12 - ليكن f اقتران من المجموعة A الى المجموعة B وان C مجموعة جزئية من B. برهن ان $f^{-1} (B-C) = A- f^{-1} (C)$.

13 - ليكن $f: A \longrightarrow B$ اقتران وأن A_2,A_1 مجموعات جزئية من A برهن أن

1) $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$

2) $f(A_1 - A_2) \neq f (A_1) - f (A_2)$

14- برهن أن الأقتران $f: A \longrightarrow B$ متباين (احادي) اذا وفقط اذا لكل مجموعة A_1 جزئية من A فإن $f(A - A_1) \subseteq B - f (A_1)$.

15 - ليكن f , g اقترانيين متباينين بحيث ان f اقتران من A الى B و g اقتران من B الى C . برهن ان gof اقتران متباين .

16 - كما في السؤال الثالث عشر اذا كان f , g اقترانيين شاملين فان gof اقتران شامل .

17 - ليكن $f: A \longrightarrow B$ ، $g:B \longrightarrow C$ اقترانين . برهن إن :

-1 إذا كان gof اقتران متباين فان f اقتران متباين .

2 - إذا كان gof اقتران شامل فان g اقتران شامل .

3 - إذا كان gof اقتران تقابلي فان g اقتران شامل و f اقتران متباين .

18 - أعط مثالا على كل حالة من الحالات الآتية مستخدما مجموعة الأعداد الحقيقية .

اقتران الغمر – اقتران ثابت – الاقتران القانوني (عرف العلاقة أولا)

اقتران متماثل (عرف علاقة الترتيب الجزئي أولا) .

19 - لتكن A ,B مجموعتين بحيث ان $A - B$ يكافيء $B-A$ (يوجد اقتران تقابلي بين $B- A$ و $A - B$) . برهن ان A يكافئ B.

20 - ليكن $f: A \longrightarrow B$ اقتران متباين برهن أن f^{-1} اقتران .

21 - الأقتران $f: A \longrightarrow B$ تقابلي اذا وفقط اذا f^{-1} اقتران تقابلي.

22 - لتكن كل من A ,B مجموعة منتهية . برهن إن $A \cup B$ مجموعة منتهية .

23 - لتكن A مجموعة غير منتهية وإن B مجموعة منتهية جزئية من A فان $A - B$ مجموعة غير منتهية.

24- إذا كانت A مجموعة قابلة للترقيم وان B مجموعة منتهية جزئية من A فان $A - B$ مجموعة قابلة للترقيم .

25 - لتكن كل من A , B مجموعة قابلة للعد . برهن إن $A \cup B$ مجموعة قابلة للعد .

26 - برهن إن مجموعة الأعداد الحقيقية مجموعة غير منتهية .

27 - برهن إن مجموعة الأعداد النسبية مجموعة قابلة للعد .

28 - لتكن $A \cup B$ مجموعة غير منتهية . برهن ان A او B مجموعة غير منتهية .

29 - لتكن A مجموعة قابلة للترقيم وان B مجموعة منتهية . برهن ان $A \cup B$ مجموعة قابلة للترقيم .

30 - ليكن $f:A \longrightarrow B$ اقتران متباين. اذا كانت A مجموعة غير منتهية. برهن أن B مجموعة غير منهية.

الفصل الثاني

الفضاءات المترية (Metric Spaces)

الفضاءات المترية (Metric Spaces)

يعد قياس اقتراب نقطتين من بعضهما البعض في مجموعة ما من المفاهيم الأساسية والمهمة . يسمى ثنائي المجموعة A وعملية القياس d بالفضاء المتري (A , d). ومن الأمثلة الشائعة للفضاء المتري نظام الأعداد الحقيقية و المستوي الاقليدي . إن الآلة الأساسية المستعملة لهذا الغرض هو الاقتران المستمر الذي يعرف بطرق متنوعة . أحد تعاريف هذا الاقتران يقال له التعريف التحليلي الذي تستعمل به الرموز δ, ε أو باستخدام مفهوم الجوارات أو المجموعات المفتوحة . لابد من الإشارة هنا بان العالم فريشت هو الذي عرف الفضاءات المترية عام 1906 . سنذكر في هذا الفصل تعريف الفضاء المتري باستخدام اقتران المسافة ، ثم نوضح العلاقة بين الفضاءات المترية باستخدام الاقترانات المستمرة ، بعد ذلك نتطرق إلى تعريف الكرات المفتوحة و الجوارات والتي بدورها ترتبط بمفهوم المجموعات المفتوحة و المجموعات المغلقة . أخيرا نعرف الفضاءات المترية الجزئية و التكافؤ بين هذه الفضاءات .

1.2: تعريف الفضاء المتري

لغرض دراسة استمرارية الاقترانات نستذكر أولا تعريف اقتران المسافة وكما يلي :

لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن b,a عنصريين في R نعرف المسافة d(a,b) بينهما بالعلاقة $d(a,b) = |a - b|$ حيث $d: R \times R \longrightarrow R$ والتي تحقق الخواص الأربعة التالية :

لكل $a , b \in R$ فان

1- $d (a, b) \geq 0$

2- $d (a,b) = 0$ إذا و فقط إذا $a = b$.

3- $d (a,b) = d (b,a)$.

4 - $d (a, c) \leq d (a,b) + d (b,c)$. تسمى الخاصية الرابعة بخاصية المثلث .

وكما نلاحظ من التعريف إن اقتران المسافة يربط كل عددين حقيقيين من R بعدد حقيقي آخر هو المسافة d(a,b). سنرى لاحقا إن هذه الخواص كافية لتجعل الاقتران d مستمر .

تعريف 2.1.2 : لتكن A مجموعة غير خالية و إن $d: A \times A \longrightarrow R$ اقتران فان (A , d) يسمى بالفضاء المتري إذا حققت d خواص اقتران المسافة بالنسبة للمجموعة A.

مبرهنة 2.1.2 : لتكن كل من (A_1 , d_1) , (A_2 , d_2) فضاءا متريا و لتكن $A = A_1 \times A_2$ و $d : A \times A \longrightarrow R$ بحيث إن لكل $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ ينتميان إلى A، نعرف d بالشكل الآتي : $d (a,b) = \max\limits_{1\le i\le 2} \{d_i (a_i, b_i)\}$. فان (A,d) فضاءا متريا .

البرهان : ينتج مباشرة بتطبيق تعريف الاقتران d . #

يمكن تعميم المبرهنة أعلاه على اكثر من فضائيين متريين باستخدام تعريف الجداء بين المجموعات . يترك التعميم والبرهان كتمرين للطالب .

مثال 1 : (R^n, d) فضاء متري إذا كانت

$d (x, y) = \max\limits_{1\le i\le n} \{|x_i - y_i|\}$ ، حيث

$x = (x_1, x_2, ... , x_n)$, $y = (y_1, y_2, ... y_n)$ نقاط في R^n.

الحل : سنتحقق من ان d تحقق خواص اقتران المسافة . بما أن

$| x_i - y_i | \ge 0$ لكل $1 \le i \le n$ فان $d (x,y)\ge 0$ وبهذا تتحقق الخاصية الأولى .

نفرض أن $d (x,y) = 0$ فيوجد $j \in \{1,2, ... ,n\}$ بحيث إن لكل i فان $|x_j - y_j | \ge | x_i - y_i|$ وإن $|x_j - y_j | = 0$. هذا يعني أن $| x_i - y_i| = 0$ لكل i.

هذا يؤدي الى إن $x_i = y_i$ لكل i وبالتالي فان $x = y$. وبالعكس نفرض أن $x = y$ أي لكل $i \in \{ 1,2, ... , n\}$ هذا يؤدي الى إن $|x_i-y_i| = 0$ لكل i وبالتالي فإن $d(x,y) = 0$. أن الخاصية الثانية سهلة التحقيق. أخيرا نفرض أن $z = (z_1, z_2, ... , z_n)$.

نقطة ما تنتمي إلى R^n وليكن $d (x,y) = |x_j - y_j|$, $d(y,z) = | y_k - z_k|$, $d(x,z) = |x_i - z_i|$. من هذا نحصل على أن $|y_i - z_i| \le| y_k - z_k|$ ، $|x_i - y_i| \le| x_j - y_j |$ لكل i. باستخدام خاصية القيمة المطلقة فإن $|x_i - z_i| \le |x_j - y_j | + |y_k - z_k|$. أي أن

$d (x,z) \le d (x,y) + d(x,y) + d (y,z)$.

هذا يعني ان (R^n , d) فضاءا متريا .

مثال 2 : لتكن $d_1 : R^n \times R^n \longrightarrow R$ اقتران مسافة معرفة بالشكل التالي : لكل $x , y \in R^n$ بحيث إن $x = (x_1, x_2, ..., x_n) , y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ فان

$$d_1 (x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

واضح إن d_1 اقتران مسافة وبالتالي فان (R^n , d_1) فضاء متري . يسمى هذه الاقتران باقتران المسافة الاقليدية .

من المثاليين السابقين نجد انه : في الحالة العامة قد يوجد عدد كبير من اقترانات مسافة معرفة على مجموعة ما (مثل A) وهذا يعني أن المجموعة A قد تتحول إلى فضاء متري بأكثر من طريقة و هذا السبب الذي يدعونا رمز الفضاء المتري بدلالة الثنائي (A, d) لبيان اقتران المسافة التي تحول المجموعة A إلى فضاء متري ، و بهذا نستدل بان تساوي الفضاءات المترية لا يعتمد فقط على المجموعة المتكون منها بل يعتمد كذلك على الاقتران المعرف على المجموعة .

2.2 : الاستمرارية بين الفضاءات المترية

إن مفهوم الاستمرارية نشأ عند تعريف الاقتران الحقيقي في موضوع حسبان التفاضل والتكامل ، لذا سوف نطرق الى هذا الموضوع باستخدام هذا المفهوم .

ليكن $f: R \longrightarrow R$ اقتران حقيقي إن الشرط الأساسي الذي يحققه الاقتران f لكي يكون مستمر عند نقطة من نقاط R (ولتكن a) هو : لكل $x \in R$ يجب إن يكون " العدد f (x) قريب من العدد f (a) بمقدار يتناسب مع قرب النقطة x من النقطة a أي اقتراب النقطتين f(x) و f(a) مقترن باقتراب النقطتين x و a "وبصورة أدق :

تعريف 1.2.2 : ليكن $f: R \longrightarrow R$ اقترانا . يسمى الاقتران f مستمرا عند النقطة $a \in R$ إذا وفقط إذا لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث إن : إذا كانت $| x - a| < \delta$ فان $| f (x) - f (a) | < \varepsilon$ يسمى الاقتران مستمرا إذا كان مستمرا على جميع نقاط R.

من تعريف الاستمرارية يمكن الاستدلال على إن للاستمرارية علاقة وثيقة مع مفهوم الفضاءات المترية الآنفة الذكر و بهذا يمكن تعريف الاستمرارية بين الفضاءات المترية. على النحو الآتي:

تعريف 2.2.2: ليكن كل من (A_1, d_1), (A_2, d_2) فضاءا متريا ولتكن $a_1 \in A_1$ فان الاقتران

$f: A_1 \longrightarrow A_2$ مستمر عند النقطة a_1 إذا وفقط إذا لكل كمية صغيرة موجبة ε توجد كمية صغيرة موجبة δ بحيث إن إذا كانت $d_1(x_1, a_1) < \delta$ فان $d_2(f(x_1), f(a_1)) < \varepsilon$ لكل $x_1 \in A_1$. كذلك يسمى الاقتران $f: A_1 \longrightarrow A_2$ مستمرا إذا كان مستمرا على جميع نقاط A_1 .

مثال : لتكن $f: R \longrightarrow R$ بحيث إن $f(x) = bx + c$ حيث $b, c \in R$ و $b \neq 0$ فان f اقتران مستمر لجميع نقاط المجموعة R (حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية) .

الحل : نفرض أن $y \in R$, $\varepsilon > 0$ لكي نحصل على $\delta > 0$ مناسبة إلى ε نستخدم المتباينة

$|(bx + c) - (by\ c)| < \varepsilon$ وهذا يؤدي إلى إن $|x-y| < \varepsilon / |b|$ وبهذا يمكن أن نأخذ

$\delta = \varepsilon / |b|$ وبالتالي فان الاقتران مستمر بالنقطة y وبما إن y نقطة اختيارية من R فان الاقتران مستمر على R.

مبرهنة 3.2.2 : ليكن كل من (A_1, d_1) , (A_2, d_2) فضاءا متريا وليكن $c: A_1 \longrightarrow A_2$ اقترانا ثابتا فان c اقتران مستمر .

البرهان : نفرض أن $a_1 \in A_1$ و $\varepsilon > 0$. نختار $\delta > 0$ واضح إن أي قيمة موجبة δ تحقق تعريف الاستمرارية مثلا نفرض $\delta = 0.2$ بحيث أن $d(x_1, a_1) < \delta$ لكل $x_1 \in A_1$ واضح إن $d_2(f(x_1), f(a_1)) = 0 < \varepsilon$. #

مبرهنة 4.2.2 : ليكن I الاقتران الذاتي على الفضاء المتري (A,d) فان I اقتران مستمر.

البرهان : ينتج مباشرة بأخذ $\varepsilon = \delta$. #

لتكن كل من (A, d) , (A, d_1) فضاءا متريا . وليكن $f: A \longrightarrow A$ اقترانا ما . واضح إن الاقتران f معرف على المجموعة A دون الإشارة إلى اقتران المسافة المعرف على منطلقها

(Domain) و مستقرها (Range) وفي هذه الحالة لا يمكن كتابة الاقتران بين الفضاءات المترية دون الإشارة إلى اقتراني المسافة المعرف على كل منها . لذا يتوجب عند كتابة الاقتران بين فضاءين متريين ذكر اقتران المسافة مع كل واحد منهما وبذلك يكتب الاقتران بالشكل الأتي :

$f: (A, d_1) \longrightarrow (A,d)$ أو $f : (A, d) \longrightarrow (A, d_1)$ وهذا يقودنا إلى مايلي:

مبرهنة 5.2.2 : لتكن الاقتران الذاتي $I : R^n \longrightarrow R^n$ فان الاقترانين $I: (R^n , d_1) \longrightarrow (R^n, d)$, $I: (R^n , d) \longrightarrow (R^n, d_1)$ مستمران حيث d يمثل اقتران المسافة المعرف بدلالة القيمة المطلقة و d_1 اقتران المسافة الاقليدي .

البرهان : لتكن $a = (a_1, ..., a_n) \in R^n$ ولتكن $\varepsilon > 0$ ، سوف نستخدم المتباينة $d_1 (x , a) < \varepsilon$ لإيجاد قيمة δ حيث $x = (x_1, ..., x_n)$. بما إن

$$d_1 (x, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}$$

وإن $d(x , a) < \delta$ أي إن $| x_i - a_i | < \delta$ لكل $i = 1,2, ... ,n$. هذا يؤدي إلى إن $d_1 (x,a) < \sqrt{n \delta^2} = \sqrt{n}\,\delta$ وبهذا يمكن اخذ $\delta = \varepsilon / \sqrt{n}$ وهكذا فان

$d_1 (I(x) , I (a)) = d_1 (x, a) < \varepsilon$ إذا كانت $d_1 (x, a) < \delta$. الان نبرهن على أن الاقتران الثاني مستمر . نفرض $\varepsilon > 0$ ، نختار $\delta = \varepsilon$. لتكن $d_1 (x, a) < \delta$ أي

$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < d^2$ ومنه نحصل على $(x_i - a_i)^2 < \delta^2$ لكل $i = 1,2, ... n$ وبالتالي فان

$|x_i - a_i | < \varepsilon$ لكل i . أذن $d (I (x), I (a)) = d (x, a) < \varepsilon$. وبهذا ينتهي البرهان . #

من المبرهنات الشائعة الاستخدام هي تركيب عدد من الاقترانات المستمرة يعطي اقترانا مستمرا .

مبرهنة 6.2.2 : ليكن كل من (A , d) , (B , d_1) , (C , d_2) فضاءا متريا وليكن $g: B \longrightarrow C$, $f: A \longrightarrow B$ اقترانات مستمرة فان الاقتران $gof : A \longrightarrow C$ مستمر .

البرهـــان : لـتكــن $a \in A$ وإن $\varepsilon > 0$. يجب أن نحصـل علــى $\delta > 0$ بحيـث إذا كـانـت $d(x,a) < \delta$ لكل $x \in A$ فان $d_2(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$. بما إن $f(a) \in B$ فان g مستمر عند النقطة $f(a)$ وبذلك توجد مثل $\gamma > 0$ بحيث لكل $y \in B$ فان $d_2(g(y), g(f(a))) < \varepsilon$، إذا كانت $d_1(y, f(a)) < \gamma$ ، الآن نستفاد من أن الاقتران f مستمر عند النقطة a، بما أن $\gamma > 0$ فـتـوجـد $\delta > 0$ بـحـيـث إذا كـانـت $d(x,a) < \delta$ فـان $d_1(f(x), f(a)) < \gamma$ وهـذا يـؤدي إلى $d_2(g(f(x)), g(f(a))) < e$. #

2.3 : الكرات المفتوحة والجوارات

ان مـا طرح في الجزء السـابق من هذا الفصل حول مـفـهوم الاستمرارية يمكن صياغته باسلوب اخـر اذا عرفنا مـا نسميه بالكرات المفتوحة (Open ball) ولكي نستدل على هذا التركيب نستخدم التعريف التحليلي للاستمرارية .

ليكن f اقـتران مـسـتـمـر بالنقطة a على الفـضـاء المتري (A,d) حيث $a \in A$، فـان f تنقل النقاط القريبة من a الى النقاط القريبة من $f(a)$. ان النقاط القريبة من a تحقق متباينة المسافة $d(x,a) < \delta$ حيث $x \in A$. اذا رمزنا لهذه المجموعة من النقاط برمز معين فيمكن تعريف الاستمرارية باستخدام هذا الرمز كما يلي .

تعريف 1.3.2: ليكن (A,d) فضـاءا متريا و a عنصـرا اختياريا في A، نسمي مجموعة النقاط في A التي مسافتها عن a اصـغر من عدد حقيقي موجب r بكرة مفتوحة مركزها a ونصف قطرها r أي

$$B(a;r) = \{ x \in A : d(x,a) < r\}$$

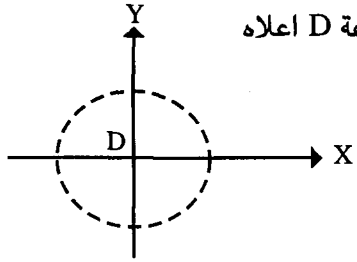
مـثـال : اذا كـانت d المسـافـة الاقليـدية على المسـتـوى R^2 (حـيث المسـافـة الاقليـدية d بين نقطتين $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$ من نقاط R^2 تعرف بالشكل الآتي

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

فان اسرة الكرات المفتوحة في الفضاء المتري (R^2, d) تسمى اسـرة الاقراص المفتوحة فيه حيث ان القرص المفتوح الذي مركزه نقطة الاصل (0,0) يعرف بالشكل الاتي

$$D = \{ (x,y) \in R^2: x^2 + y^2 < r , r \in R\}$$

والشكل الآتي يبين المجموعة D اعلاه



اما اذا كانت d المسافة العادية (القيمة المطلقة بين عددين) على مجموعة الاعداد الحقيقية R فاننا نقول فترة مفتوحة بدلا من كرة مفتوحة . فمثلا اذا كان b,a عددين حقيقيين بحيث ان $a < b$ فان مجموعة الأعداد الحقيقية$\{x \in R : a < x < b\}$ تمثل فترة مفتوحة. من الملاحظ ان الكرات المفتوحة في الفضاءات المترية لا تمتلك جميع الصفات التي تتصف بها الكرات المفتوحة في الفضاءات الاقليدية R^n، مثلا لتكن $B(a;r_1)$, $B(b;r_2)$، كرتين مفتوحتين غير متقاطعتين في R^3. واضح ان $d(a,b) \geq r_1 + r_2$ حيث d اقتران متري و $a, b \in R^3$ ان هذه الصفة لا تتحقق بشكل عام في الفضاءات المترية ومثال ذلك ليكن (A, d) فضاءا متريا بحيث ان لكل x,y تنتمي الى A

$$d(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \neq y \\ 0 & \text{if } x = y \end{cases}$$

نفرض ان $r_1 = r_2 = 3/2$ فان لكل $a, b \in A$ بحيث $a \neq b$ فان $B(a;r_1) = \{a\}$، $B(b;r_2) = \{b\}$ وهذا يعني ان $B(b;r_2) \cap B(a;r_1) = \phi$ وان $d(a,b) = 2 < r_1 + r_2 = 3$.

بما ان تعريف الكرات المفتوحة اعتمد على تعريف الاستمرارية الى حد ما لذلك نحصل على النتيجة الاتية :

مبرهنة 2.3.2 : ليكن كل من (A,d), (B, d_1) فضاءا متريا . الاقتران $f:A \longrightarrow B$ مستمر بالنقطة $a \in A$ اذا وفقط اذا لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث

$$f(B(a;\delta)) \subseteq f^{-1}(B(f(a);\varepsilon))$$

البرهان : يتم باستخدام تعريفي الكرة المفتوحة والاستمرارية #

مبرهنة 3.3.2 : ليكن f اقتران من الفضاء المتري (A, d) الى الفضاء المتري (B, d_1) فان f مستمر بالنقطة a اذا وفقط اذا لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث

$B(a;\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a);\varepsilon))$.

البرهان : نستخدم الخاصية الاتية للحصول على النتيجة مباشرة :

لكل اقتران $f : A \to B$ و $C \subseteq A$ و $D \subseteq B$ فان $f(C) \subseteq D$ اذا وفقط اذا $f^{-1}(D) \subseteq C$. # .

ليكن (A, d) فضاءا متريا و $a \in A$ فان لكل $r > 0$ (r عدد حقيقي) $B(a;r)$ مجموعة جزئية من A (كرة مفتوحة) . هذا النوع من المجموعات الجزئية تسمى بجوار النقطة a في A.

تعريف 4.3.2. : ليكن (A,d) فضاءا متريا ولتكن a نقطة تنتمي الى A. المجموعة الجزئية N من A تسمى جوار (Neighborhood) a في A اذا وجد $r > 0$ بحيث ان $B(a;r) \subseteq N$.

ان مجموعة جميع الجوارات للنقطة a في المجموعة A تسمى بنظام كامل للجوارات على a. فمثلا اذ اخذنا الفضاء المتري الحقيقي (R,d) (حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية) وان d هو اقتران القيمة المطلقة في R . اذا كانت $A = \{ x \in R : 0 < x \leq 3\}$ نلاحظ ان النقطة 2 مثلا يوجد لها عدة جوارات ومنها الفترة المفتوحة $(3/2, 5/2)$ بينما النقطة 3 لايوجد لها جوار (فترة مفتوحة) محتوى في A.

مبرهنة 5.3.2 : ليكن (A, d) فضاءا متريا وان $a \in A$, $r > 0$ فان الكرة المفتوحة $B(a;r)$ تمثل جوار لاي نقطة تقع داخل الكرة المفتوحة .

البرهان : لتكن b نقطة ما تنتمي الى الكرة المفتوحة $B(a;r)$ فان $d(a,b) < r$.

نختار r_1 اصغر من العدد $r - d(a,b)$. هذا يؤدي الى وجود كرة مفتوحة $B(b;r_1)$ مركزها b ونصف قطرها r_1 بحيث انها مجموعة جزئية من الكرة المفتوحة $B(a;r)$ وذلك باستخدام الخاصية المثلثية . #

لتكن N جوار للنقطة a بالفضاء المتري (A , d)، وان N_1 مجموعة جزئية من A بحيث $N \subseteq N_1$ واضح ان N_1 تحتوي على جميع الكرات المفتوحة للنقطة a والموجودة في N. هذا يعني ان N_1 جوار اخر للنقطة a.

مبرهنة 6.3.2 : ليكن f اقتران من الفضاء المتري (A,d) الى الفضاء المتري (B, d_1) ولتكن a نقطة تنتمي الى A. فان f اقتران مستمر بالنقطة a اذا وفقط اذا معكوس الصورة لكل جوار للنقطة $f(a)$ هو جوار للنقطة a.

البرهان : ينتج بسهولة باستخدام المبرهنة (5.3.2) . #

ان اهم خواص الجوارات في الفضاء المتري يمكن تلخيصها بالمبرهنة التالية :

مبرهنة 7.3.2: ليكن (A,d) فضاءا متريا وان a نقطة ما من نقاط A فان :

1- كل جوار N للنقطة a يحتوي على النقطة a.

2- اذا كان N جوار للنقطة a وان N_1 يحتوي على N فان N_1 جوار للنقطة a.

3- اذا كان كل من M , N جوار للنقطة a فان $M \cap N$ جوار للنقطة a.

4 - اذا كان N جوار للنقطة a. توجد مجموعة جزئية B من N بحيث ان B جوار لاي نقطة من نقاطها .

البرهان : الخواص 1 و 2 سهلة تنتج من المناقشة السابقة مباشرة . نبرهن الان الخاصية الثالثة . بما ان M , N جوارين للنقطة a هذا يؤدي الى وجود كرتين مفتوحتين , $B(a;r_2)$ $B(a;r_1)$ محتواة في الجوارين M ,N على التوالي . ناخذ r اصغر العددين r_1 , r_2 وهذا يعني ان الكرة المفتوحة $B(a;r)$ محتواة في تقاطع N مع M. وبالتالي فان $M \cap N$ جوار للنقطة a. اما الخاصية الرابعة فيمكن اثباتها باستخدام المبرهنة (5.3.2) . #

تعريف 8.3.2 : ليكن (A , d) فضاءا متريا و a نقطة تنتمي الى المجموعة A فان مجموعة الجوارات B للنقطة a تسمى قاعدة نظام الجوارات للنقطة a اذا وفقط اذا كان كل جوار N للنقطة a يحتوي على بعض عناصر B. فمثلا اذا كانت a نقطة تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية فان قاعدة نظام الجوارات للنقطة a هي مجموعة الفترات المفتوحة التي تحتوي على النقطة a.

2.4: المجموعات المفتوحة والمغلقة

ان مفهوم المجموعات المفتوحة والمغلقة له دورا أساسيا في موضوع التبولوجيا لذا فان هذا الجزء يتناول المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاء المتري لكي نتحسس ماهية هذه المجموعات في هذا الفضاء اولا .

تعريف 1.4.2 : ليكن (A , d) فضاءا متريا و B مجموعة جزئية من A تسمى B مجموعة مفتوحة في A اذا وفقط اذا كانت B جوار لكل نقطة من نقاطها .

يمكن الاستدلال بان تعريف المجموعة المفتوحة مستل من تعريف الكرة المفتوحة .

مبرهنة 2.4.2 : ليكن (A , d) فضاءا متريا وان B مجموعة جزئية من A. اذن B مجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا كانت B تساوي اتحاد لكرات مفتوحة من A.

البرهان : نفرض اولا B مجموعة مفتوحة . فان لكل عنصر b ينتمي الى B يوجد جوار N للنقطة b في B. بذلك توجد كرة مفتوحة مثل $B(b;r)$ جزئية من B، هذا يعني ان B عبارة عن اتحاد لكرات مفتوحة من A أي ان $B = \cup B(b; r_b)$. بالعكس لتكن B اتحاد لكرات مفتوحة، نفرض ان x نقطة ما تنتمي الى B. هذا يؤدي الى وجود كرة مفتوحة مثل $B(a;r)$ بحيث ان $x \in B(a;r)$. وهذا يعني ان $B(a;r)$ جوار للنقطة x. بما ان $B(a;r) \subseteq B$ فان B جوار للنقطة x باستخدام الخاصية الثالثة للجوارات . #

ان غالبية الاقترانات في موضوع التبولوجيا هي اقترانات مستمرة وبما ان المجموعات المفتوحة لها دور رئيسي في هذا الموضوع فيجب ان نتطرق الى مفهوم الاستمرارية باستخدام المجموعات المفتوحة .

مبرهنة 3.4.2 : ليكن كل من (A , d) , (B, d_1) فضاءا متريا و $f: A \longrightarrow B$. يكون f اقترانا مستمرا اذا وفقط اذا كان لكل مجموعة جزئية مفتوحة D من B وان $f^{-1}(D)$ مجموعة جزئية مفتوحة في A.

البرهان : ليكن f اقترانا مستمرا و D مجموعة جزئية مفتوحة في B. نفرض ان a عنصر ما ينتمي الى المجموعة $f^{-1}(D)$ فان $f(a) \in D$ وان D جوار الى $f(a)$، ومن المبرهنة (3.3.3) نستنتج ان $f^{-1}(D)$ جوار للنقطة a وهذا يعني ان $f^{-1}(D)$ مجموعة جزئية مفتوحة في A. بالعكس لتكن D مجموعة جزئية مفتوحة من B بحيث $f^{-1}(D)$ مجموعة مفتوحة في A. نفرض ان a نقطة تنتمي الى المجموعة A و M جوار للنقطة $f(a)$ فيوجد $r > 0$ بحيث ان $B(f(a);r) \subseteq M$. بما ان $B(f(a) ; r)$ مجموعة مفتوحة فان $f^{-1}(B(f(a) ; r))$ مجموعة مفتوحة تحتوي على النقطة a وبهذا فان $f^{-1}(M)$ يحتوي على جوار للنقطة a وبالتالي فان f اقتران مستمر . #

ان المبرهنة التالية تبين العلاقة بين المجموعات المفتوحة والكرات المفتوحة :

مبرهنة 4.4.2 : ليكن (A , d) فضاءا متريا فان :

1-المجموعة الخالية مجموعة مفتوحة في A.

2- A مجموعة مفتوحة في A.

3- اذا كانت A_1 , A_2 مجموعات مفتوحة في A فان $A_1 \cap A_2$ مجموعة مفتوحة في A.

4- لتكن I مجموعة الدليل ولكل $i \in I$ لتكن A_i مجموعة جزئية مفتوحة في المجموعة A فان $\cup A_i$ مجموعة جزئية مفتوحة في A.

البرهان:1- من الواضح ان المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من المجموعة A هذا يؤدي الى ان المجموعة الخالية مفتوحة في A لعدم وجود عنصر فيها وذلك باستخدام المنطق الرياضي.

2- لتكن a نقطة ما في A، يوجد $r > 0$ بحيث ان A $B(a ; r)$ ، وهذا يعني ان A جوار لكل نقطة من نقاطها وبالتالي فان A مجموعة مفتوحة في A.

3- لتكن a نقطة تنتمي الى تقاطع المجموعتين A_1 , A_2 فان a تنتمي الى A_1 وكذلك تنتمي الى A_2 وبهذا فان A_1,A_2 جوارات الى a وباستخدام الخاصية الرابعة من خواص الجوارات ينتج ان $A_2 \cap A_1$ جوار للنقطة a أي ان $A_2 \cap A_1$ مجموعة جزئية مفتوحة في A.

4- ليكن a نقطة تنتمي الى المجموعة $\cup A$ يوجد $j \in I$ بحيث ان $a \in A$ وهذا يؤدي الى ان A_j جوار للنقطة a أي ان $\cup A_i$ جوار للنقطة a وهذا يعني ان $\cup A_i$ مجموعة مفتوحة في A. #

تعريف 5.4.2 : ليكن(A,d) فضاءا متريا و F مجموعة جزئية من A ، يقال للمجموعة F بانها مغلقة اذا وفقط اذا متممة F مجموعة جزئية مفتوحة في A.

في خط الاعداد الحقيقية يرمز للفترة المغلقة (Closed interval) بالرمز $[c,d]$ فان متممة الفترة $[c,d]$ هي اتحاد الفترتين $(-\infty, c)$, (d, ∞) وبسهولة ان متممة الفترة المغلقة عبارة عن اتحاد فترات مفتوحة . في هذا الموضوع توجد بعض المجموعات تتصف بصفتي مفتوحة و مغلقة في آن واحد ومن هذه المجموعات المجموعة الخالية والمجموعة الكلية A في الفضاء المتري (A,d).

"ان موضوع التبولوجيا يرتكز على حقيقة بان مجموعاته الجزئية التي تلعب دورا مهما تكون مفتوحة او مغلقة او تحمل الصفتين في ان واحد " .

تعريف 6.4.2 : لتكن A_1 مجموعة جزئية من الفضاء المتري (A,d)، وليكن b عنصر ما في A. تسمى b نقطة حدية (Limit point) للمجموعة A_1 اذا كان كل جوار N الى النقطة b يحتوي على الاقل نقطة من نقاط A_1 مختلفة عن b. أي ان $N \cap (A_1 - \{b\}) \neq \phi$.

من التعريف اعلاه يمكن الاستدلال على :

اذا كانت b نقطة حدية للمجموعة A_1 فتوجد متتابعة من نقاط A_1 تكون متقاربة الى b (سنبرهن هذه العبارة في فضاءات اكثر شمولا هي الفضاءات التبولوجية كما في 8.3) . اما اذا كانت $b \in A_1$ بحيث يوجد جوار N للنقطة b وان $A_1 \cap N = \{b\}$ فنسمي النقطة b منعزلة (Isolated) عن A_1.

مثال : لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية واقتران المسافة هو القيمة المطلقة و $A_1 = (0,1]$ فان نقطة الصفر هي احدى النقاط الحدية للمجموعة A_1 وان $\{1,1/2,1/3,...\}$ متتابعة متقاربة الى الصفر . بينما اذا كانت المجموعة $A_1 = \{1,2,3,...\}$ فان جميع نقاطها تكون منعزلة وذلك اذا فرضنا ان $n \in A_1$ فان $(n - \frac{1}{2}, n + 1/2)$ جوار للنقطة n و

$$(n - 1/2, n + \frac{1}{2}) \cap A_1 = \{n\}$$

مبرهنة 7.4.2 : ليكن (A , d) فضاءا متريا فان المجموعة الجزئية F من A تكون مغلقة اذا وفقط اذا F تحتوي على جميع نقاطها الحدية .

البرهان : لتكن F مجموعة مغلقة فان $A-F = C (F)$ مجموعة مفتوحة . نفرض ان $b \notin F$ وبهذا فان $b \in C (F)$ وهذا يعني وجود $r > 0$ بحيث ان $B (b;r) \subseteq C (F)$ أي ان $B(b;r) \cap F = \phi$ وهذا يؤدي الى ان b ليست نقطة حدية الى F وبالتالي فان النقاط الحدية الى المجموعة F تنتمي الى F. بالعكس نفرض ان F_1 مجموعة النقاط الحدية الى المجموعة F بحيث ان F_1 مجموعة جزئية من F أي ان $C (F) \subseteq C (F_1)$. يكفي ان نبرهن ان المجموعة الجزئية $C (F)$ مفتوحة في A. ليكن b عنصر ينتمي الى $C(F)$ فان b لا ينتمي الى F_1 وهذا يعني وجود $r > 0$ بحيث ان $B(b;r) \cap F = \phi$، أي ان $B (b;r) \subseteq C(F)$. وبالتالي فان F مجموعة مغلقة . #

مبرهنة 8.4.2 : ليكن كل من (A,d) , (B, d_1) فضاءا متريا . الاقتران $f: A \longrightarrow B$ يكون

مستمرا اذا وفقط اذا كان لكل مجموعة جزئية مغلقة F من B, $f^{-1}(F)$ مجموعة جزئية مغلقة في A.

البرهان : يمكن استنتاجه باستخدام مفهوم المجموعات المفتوحة في المبرهنة (3.4.2 والعلاقة التالية)

$$f^{-1}(C(F)) = C(f^{-1}(F)) \ . \ \#$$

مبرهنة 9.4.2 : ليكن(A , d) فضاءا متريا فان :

1- A مجموعة مغلقة في A.

2- ϕ مجموعة مغلقة في A.

3- لتكن F_1 , F_2 مجموعتين جزئيتين مغلقتين في A فان $F_1 \cup F_2$ مجموعة جزئية مغلقة في A.

4- لتكن I مجموعة الدليل وان F_i مجموعة مغلقة في A (لكل $i \in I$) فان $\cap F_i$ مجموعة مغلقة في A.

البرهان : بسيط وواضح باستخدام مبرهنة خواص المجموعات المفتوحة (4.4.2) وقوانين دمورغن التي ذكرت في الفصل الاول . #

يجدر الاشارة الى ان اتحاد عدد غير منته من مجموعات مغلقة ليس بالضرورة مجموعة مغلقة كما في المثال ادناه :

مثال : لتكن F_n تمثل فترة مغلقة من نوع $[1/n, 1]$ في مجموعة الاعداد الحقيقية وان n عدد صحيح موجب فان اتحاد هذه الفترات هي فترة ليست مغلقة وهي الفترة نصف المفتوحة $(0,1]$ واضح ان الصفر نقطة حدية للمجموعة $(0,1]$ ولا تنتمي اليها .

5.2 : الفضاءات الجزئية وتكافؤ الفضاءات المترية

ليكن (A,d) فضاءا متريا وB مجموعة جزئية من A. يمكن بناء فضاء متري معرف على المجموعة B وان اقتران المسافة هو مقصور اقتران المسافة d المعرفة على A، بهذا يمكن القول بان (B, d_1) فضاء متري جزئي من (A,d) حيث d_1 اقتران المسافة على B وبصورة اكثر

وضوحا :

تعريف 1.5.2 : ليكن كل من (A,d) , (B, d_1) فضاءا متريا . يقال ان (B,d_1) فضاء متري جزئي من (A,d) اذا وفقط اذا B مجموعة جزئية من A وان $(d_1 = d \mid B \times B)$ (حيث d_1 مقصور الاقتران d على الجداء $B \times B$).

ليكن (A,d) فضاءا متريا و B مجموعة جزئية من A وليكن $i : B \longrightarrow A$ اقتران الاحتواء . واضح ان (B,d_1) فضاء متري جزئي من (A , d) ذلك باختيار الاقتران d_1 المعرف على B عبارة عن تركيب للاقترانين $i \times i$ و d أي ان

$$B\times B \xrightarrow{i \times i} A\times A \xrightarrow{d} R$$

مبرهنة 2.5.2 : ليكن (B, d_1) فضاءا متريا جزئيا من الفضاء المتري (A , d) فان اقتران الاحتواء $i : B \longrightarrow A$ مستمر .

البرهان : بسيط وذلك باختيار $\delta = \varepsilon$. #

مثال 1 : ليكن (R^2,d) الفضاء المتري الاقليدي وان I^2 المربع الذي طول ضلعه واحد . يمكن بناء فضاء متري جزئي هو (I^2,d_1) من الفضاء المتري (R^2,d) باستخدام اقتران الاحتواء . وبهذا يمكن القول بان عدد الفضاءات المترية الجزئية يعتمد على عدد المجموعات الجزئية من المجموعة الاصلية .

مثال 2 : لتكن A مجموعة عناصر من نوع $(x_1,x_2, \quad , x_{n-1},0)$ حيث ان لكل $(i = 1,2, \dots ,n-1)$ فان x_i عدد حقيقي . عرف اقتران المسافة d على المجموعة A بالشكل الاتي: $d_A : A \times A \longrightarrow R$ بحيث ان لكل نقطتين $(x_1,\dots, x_{n-1}, 0), (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ ينتميان الى A فان

$$d_A ((x_1, \dots,x_{n-1},0), (y_1, \dots , y_{n-1}, 0)) = \underset{1\le i\le n-1}{\mathrm{Max}} \{|x_i - y_i|\}$$

واضح ان (A,d_A) فضاء متري جزئي من الفضاء المتري (R^n, d).

من المثال اعلاه يمكن القول بان الفضاء المتري (A,d_A) هو نسخة للفضاء المتري (R^{n-1},d) لكن الفرق الاساسي هو ان عناصر A تتكون من المرتب النوني (n - tuple) بينما عناصر R^{n-1} تتكون من المرتب (n-1)، ان العلاقة بين هاتين الفضائيين تسمى بالتكافؤ المتري (Equivalence Metric).

تعريف 3.5.2 : ليكن كل من (A,d_A) , (B,d_B) فضاءاً مترياً . نسمي هذين الفضائيين متكافئين مترياً اذا وفقط اذا يوجد اقترانين $f:A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow A$ احداهما معكوس الاخر وان لكل $a,c \in A$, $b,e \in B$ فان

$$d_A(g(b), g(e)) = d_B(b,e),\ d_B(f(a), f(c)) = d_A(a,c)$$

مبرهنة 4.5.2 : ليكن كل من (A,d_A) , (B,d_B) فضاءاً مترياً فانهما متكافئان مترياً اذا وجد اقتران $f:A \longrightarrow B$ يحقق ماياتي :

1- f اقتران تقابلي .

2- لكل $a , c \in A$ فان $d_B(f(a), f(c)) = d_A(a,c)$.

البرهان : بما ان f اقتران تقابلي فان للاقتران f معكوس وليكن $g:B \longrightarrow A$ نفرض ان $b,e \in B$ بحيث ان $a = g(b)$, $c = g(e)$ فنحصل على

$$d_A(g(b), g(e)) = d_A(a,c) = d_B(f(a), f(c)) = d_B(b,e)\ .\ \#$$

6.2 : أسئلة

1- لتكن A مجموعة غير خالية وان $d: A\times A \longrightarrow R$ بحيث ان

$$d(a,b)=\begin{cases} 0 & \text{if } a=b \\ 1 & \text{if } a\neq b \end{cases}$$

. برهن ان (A,d) فضاءاً مترياً .

2- ليكن (A,d) فضاءاً مترياً وان k عدد حقيقي موجب عرف الاقتران $d_k(a,b) = kd(a,b)$ برهن ان (A,d_k) فضاء متري.

3 - لتكن الاقترانات k,h,g,f معرفة بالشكل الاتي :

$f:R^2 \longrightarrow R^2xR^2$ بحيث ان $f(x,y) = ((x,y),(x,y))$

$g: R^2 \times R^2 \longrightarrow RxR$ بحيث ان $g((x,y), (z,w)) = (x+y), (z - w))$

$h : RxR \longrightarrow RxR$ بحيث ان $h(x, y) = (x^2, y^2)$

$k: RxR \longrightarrow R$ بحيث ان $k(x,y) = (x-y)$

برهن ان هذه الاقترانات مستمرة وان $(kohogof)(x,y) = xy$.

4- ليكن $f:RxR \longrightarrow R$ اقتران بحيث ان لكل $(x,y)\in RxR$ فان $f(x,y) = x + y$. برهن ان f اقتران مستمر لكلا حالتي تعريف اقتران المسافة على R^2 بطريقة القيمة المطلقة او بالطريقة الاقليدية .

5- ليكن $f:R \longrightarrow R$ الاقتران الحقيقي وان a عدد حقيقي في R بحيث ان

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq a \\ 1 & \text{if } x > a \end{cases}.$$

برهن ان الاقتران f مستمر على جميع نقاط R ماعدا النقطة a.

6- ليكن كل من (A,d), (C, d_1) فضاءا متريا وان $f:A \longrightarrow C$ اقتران ما . ليكن a عنصر من عناصر A وB قاعدة نظام الجوارات على النقطة $f(a)$. برهن ان f مستمر بالنقطة a اذا وفقط اذا لكل جوار N من B فان $f^{-1}(N)$ جوار للنقطة a.

7- ليكن (A,d) فضاءا متريا وان a, b نقطتان مختلفتان في A. برهن ان يوجد جوار N_a وجوار N_b للنقطتين a و b على التوالي بحيث ان $N_a \cap N_b = \phi$

8- لتكن A مجموعة غير خالية وان d اقتران المسافة بحيث ان

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{if } a = b \\ 1 & \text{if } a \neq b \end{cases}.$$

برهن ان (A,d) فضاءا متريا وان أي مجموعة جزئية من A تكون مفتوحة .

9- ليكن (A,d) فضاءا متريا وان F مجموعة جزئية من A. لتكن F_1 مجموعة النقاط الحدية للمجموعة F وان F_2 مجموعة النقاط المنعزلة للمجموعة F. برهن ان $F_1 \cap F_2 = \phi$ وان F مجموعة جزئية من المجموعة $F_1 \cup F_2$

10- برهن ان الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ تكون فضاءا متريا جزئيا من مجموعة الاعداد الحقيقية (حيث اقتران المسافة معرف بدلالة القيمة المطلقة).

11- برهن ان التكافؤ بين الفضاءات المترية يعطينا علاقة تكافؤ على المجموعة التي عناصرها فضاءات مترية .

12- ليكن (B , d_1) فضاءا متريا جزئيا من الفضاء المتري (A,d) فان :

1- لتكن D مجموعة جزئية من B فان D مجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا توجد مجموعة مفتوحة E من A بحيث ان $D = B \cap E$.

2- لتكن F_1 مجموعة جزئية من B فان F_1 مجموعة مغلقة اذا وفقط اذا توجد مجموعة مغلقة F من A بحيث ان $F_1 = B \cap F$.

الفصل الثالث

الفضاءات التبولوجية

(Topological Spaces)

الفضاءات التبولوجية
(Topological Spaces)

ان موضوع الفضاءات التبولوجية عالج كثيرا من المشاكل الرياضية وبالذات تصنيف بعض الفضاءات حيث لم يقتصر على مجموعات معينة لان التبولوجي يمكن بناءه على أي مجموعة . كذلك ناقش موضوع التحليل الحقيقي بشكل اعم لذلك يمكن اعتباره علم تجريدي لانه يعرف على أي مجموعة ويمكن اعتباره تطبيقي على بعض المواضيع الرياضية .

بدأت دراسة موضوع التبولوجي على مجموعة الأعداد الحقيقية ومن ثم على المستوي الاقليدي وبذلك يمكن اعتباره من الموضوعات الرياضية التي يمكن تحسسها من خلال بعض تطبيقاته الهندسية .

ان دراسة التبولوجي على مجموعة الاعداد الحقيقية والمستوي الاقليدي له نكهة خاصة لبعض الافكار الرياضية التي تنطبق على هذه المجموعات ومنها الاستمرارية . ان هذه المجموعات نوقشت في مفهوم الفضاءات المترية وبما ان الفضاءات المترية هي اشمل من هاتين المجموعتين فدراسة التبولوجي على الفضاءات المترية اخذ المرحلة الثانية من تطور علم التبولوجيا وبصورة عامة لم تقتصر دراسته على هذه المجموعات فقد عمم على أية مجموعة بغض النظر عن خواص عناصرها .

ان بناء الفضاء التبولوجي يستند اساسا على فكرة المجموعات المفتوحة (او المغلقة) التي تطرقنا اليها في الفصل السابق و بما ان فكرة المجموعات المفتوحة اعتمدت على مفهوم الجوارات فمن الممكن انشاء الفضاء التبولوجي بالاستناد على فكرة الجوارات وفي هذه الحالة يسمى الفضاء الناتج بفضاء الجوارات ، ولكن النوعين من الفضاءات متكافئان لذا سوف نقتصر بتعريف التبولوجي استنادا على فكرة المجموعات المفتوحة .

في هذا الفصل سوف ندرس موضوع الفضاءات التبولوجية بشكل تجريدي ونعزز التعاريف وبعض النتائج بامثلة من الفضاءات المترية التي نوقشت سابقا .

1.3: تعريف الفضاء التوبولوجي

تعريف 1.1.3 : لتكن X مجموعة غير خالية و T اسرة مجموعات جزئية من X بحيث ان T تحقق الشروط الاتية :

1- المجموعتان ϕ , X تنتميان الى T.

2- لكل A_1 , A_2 ينتميان الى T فان تقاطع A_1 مع A_2 ينتمي الى T (أي ان تقاطع عدد منته من عناصر T يكون عنصرا في T ايضا) .

3- لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ عدد غير منته من عناصر T فان اتحاد هذه المجموعات هي مجموعة تنتمي الى T (أي ان اتحاد عدد غير منته من عناصر T هو عنصرا في T) .

نسمي T بالتبولوجيا على X و (X , T) بالفضاء التبولوجي وعناصر T تسمى بالمجموعات المفتوحة وعناصر X بالنقاط .

واضح ان الشروط المبينة اعلاه مطابقة للشروط المذكوره في المبرهنة (4.4.2) في الفصل الثاني ، وبهذا فان لكل فضاء متري يمكن بناء تبولوجي عليه وهذا يعني ان الفضاءات المترية هي مجموعة جزئية من الفضاءات التبولوجية ولكن العكس ليس صحيح " انظر مثال رقم (7) ادناه " .

مثال 1 : لتكن X مجموعة غير خالية و $T = \{\phi , X\}$. واضح ان T تحقق الشروط الثلاث. وهذا يعني ان T تبولوجي على X، أي ان (X , T) فضاء تبولوجي . هذا النوع من التبولوجيا يمكن بناءه على أي مجموعة ويسمى بالتبولوجيا الضعيفة (Indiscrete Topology).

مثال 2 : لتكن X مجموعة تحتوي على نقطتين مختلفتين مثل a , b و

$$T_1 = \{\phi , X\} \quad , \quad T_2 = \{\phi , \{a\} , X\}$$

$$T_3 = \{ \phi, \{b\} , X\} , T_4 = \{ \phi , \{a\} , \{b\} , X\}$$

واضح ان كل من T_1 , T_2 , T_3 , T_4 تبولوجيات على X. نسمي التبولوجيا T_4 بالتبولوجيا القوية (Discrete topology)، وان $T_4 = P (X)$ (حيث$P (X)$ اسرة جميع المجموعات الجزئية من X.

مثال 3 : لتكن $X = N$ (حيث N مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة) $A_n = \{1,2,\ldots,n\}$، ولتكن $T_n = \{\phi , X\} \cup \{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\}$. فان T_n تبولوجي على X لكل $(n\in N)$.

الحل : ببساطة ان T_n تحتوي على ϕ و X من تعريف T_n وبهذا يتحقق الشرط الاول . اما بالنسبة الى الشرط الثاني نفرض ان B, D عنصرين من عناصر T_n، وبهذا فان B مجموعة جزئية منD او D مجموعة جزئية من B وفي كلتا الحالتين فان تقاطعهما عنصر في T_n. اخيرا ، لكل عدد غير منته من عناصر T_n توجد مجموعة تحتوي على جميع هذه المجموعات وبذلك فان اتحاد هذه المجموعات هي مجموعة تنتمي الى T_n. وبهذا فان T_n تبولوجي على X. كذلك يمكن صياغة نوع اخر من التبولوجيا على المجموعة $X = N$ كما في المثال التالي:

مثال 4 : لتكن $X = N$ ولتكن $A_n = \{n, n+1, \dots\}$. نفرض ان

$T = \{\phi, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ فان (X, T) فضاء توبولوجي .

الحل : واضح ان الشرط الاول متحقق حيث ان $X = A_1$. اما بالنسبة للشرط الثاني قبل البدء به يمكن ترتيب عناصر T بالشكل الاتي $X = A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$. اذن تقاطع أي مجموعتين او عدد منته من هذه المجموعات هو المجموعة الصغرى و بالتالي فانها عنصر من عناصر T. اخيرا بسهولة يمكن القول بان اتحاد عدد غير منته من عناصرT يمثل مجموعة واحدة تحتوي على بقية المجموعات وهذه المجموعة تنتمي الى T، وبالتالي فان T تبولوجي على المجموعة X.

من الامثلة اعلاه يمكن الاستدلال بان ممكن بناء اكثر من تبولوجي على المجموعة الواحدة ويعتمد هذا على عدد عناصر المجموعة .

مثال 5 : لتكن $(X = R)$ (حيث R مجموعة الاعداد الحقيقية) وان T اسرة جميع المجموعات الجزئية من X المساوية لاتحاد فترات مفتوحة . فان T توبولوجي على $X = R$.

الحل : واضح ان $\phi, X \in T$ وبهذا فان الشرط الاول متحقق . اما بالنسبة للشرط الثاني، لتكن A_1, A_2 عنصرين في T فان A_1 , A_2 يمكن كتابتهما على شكل اتحاد فترات مفتوحة من X. نفرض ان

$A_1 = \bigcup_{i \in I} v_i$, $A_2 = \bigcup_{j \in J} w_j$ حيث v_i , w_i فترات مفتوحة في R.

فان $A_1 \cap A_2 = (\bigcup_{i \in I} v_i) \cap (\bigcup_{j \in J} w_j) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (v_i \cap w_j)$

بما ان تقاطع أي فترتين مفتوحتين من R اما ان تكون المجموعة الخالية او فترة مفتوحة . بهذا نستنتج ان تقاطع A_1 مع A_2 عنصر في T. اخيرا لتكن $A_1, A_2, \ldots$ عناصر في Tونفرض ان $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ فان لكل عنصر A_i $(i \in I)$ يمكن كتابته على شكل اتحاد فترات مفتوحة من R وهذا يؤدي الى ان A عبارة عن اتحاد فترات مفتوحة من R. هذا يعني ان $A \in T$ وبالتالي فان T تبولوجي على $X = R$. نسمي هذه التبولوجيا بالتبولوجيا الاعتيادية (Usual topology) ويسمى الفضاء التبولوجي (R , T) بالفضاء التبولوجي الحقيقي (Real topological space). وهذا مثال يدلل ان الفضاء المتري (R , d) تم انشاء تبولوجي عليه .

مثال 6 : لتكن X مجموعة غير منتهية ولتكن T اسرة المجموعات الجزئية من X بحيث ان متممة أي مجموعة جزئية من هذه الاسرة اما X او مجموعة منتهية فان (X , T) فضاء تبولوجي .

الحل : لتحقيق الشرط الاول واضح ان ϕ متممة الى X وان ϕ مجموعة منتهية فان X تنتمي الى Tوان X متممة ϕ فان ϕ تنتمي الى T. اما بالنسبة الى الشرط الثاني نفرض ان A_1 , A_2 عنصرين من عناصر T ، يجب ان نبرهن ان متممة $A_1 \cap A_2$ اما X او مجموعة منتهية . بما ان $X - (A_1 \cap A_2) = (X - A_1) \cup (X - A_2)$ وبما ان اتحاد عدد منته من مجموعات منتهية يجب ان يكون مجموعة منتهية . هذا يعني ان $X - (A_1 \cap A_2)$ مجموعة منتهية الا اذا كان تقاطع A_1 مع A_2 يساوي المجموعة الخالية وفي هذه الحالة تكون متممة $A_1 \cap A_2$ هي المجموعة X وفي كلتا الحالتين فان $A_1 \cap A_2$ عنصر في T. اخيرا لكي نحقق الشرط الثالث نفرض ان لكل $i \in I$ فان A_i عنصر من عناصر Tوبهذا فان متممة A_i (لكل $i \in I$) اما مجموعة منتهية او المجموعة X وبما ان $X - \cup A_i = \cap (X - A_i)$ ولكل $i \in I$ اما $X - A_i$ هي المجموعة X وبذلك فان تقاطعهما هو المجموعة X او ان $X - A_i$ مجموعة منتهية وبذلك فان تقاطعهما مع أي عدد من المجموعات المنتهية او X هو مجموعة منتهية . وهذا يعني ا ن (X , T) فضاء تبولوجي . يسمى هذا التبولوجي بتبولوجيا المتممات المنتهية (Finite complement topology) .

مثال 7 : لتكن X مجموعة تحتوي على عنصرين فاكثر فان التبولوجيا الضعيفة على X

ليست متولدة من فضاء متري بشكل عام . وبصورة ادق نفرض ان$X = \{a,b\}$ ، بحيث ان $a \neq b$ ونفرض ان (X,d) فضاء متري . يمكن توليد مجموعتين مفتوحتين A_b , A_a بحيث ان تقاطعهما هو المجموعة الخالية ، وهذا يناقض التبولوجيا المعرفة على X. كذلك ينطبق التفسير اعلاه على المثال الثاني للتبولوجيات T_3و T_2 في المثال (2).

مثال 8: لتكن R مجموعة الاعداد الحقيقية و

$$T = \{A_r: r \in R\} \cup \{R, \phi\}$$

حيث $A_r = \{x \in R: x < r\}$ فأن T تبولوجي على R.

الحل:واضح أن الشرط الأول متحقق اما بالنسبة للشرط الثاني، نفرض أن A_s, A_r عنصرين من عناصر T وهذا يؤدي أن $r \leq s$ أو $s < r$.

نفرض أن t اصغر العددين $\{s , r\}$ هذا يعني أن $A_r \cap A_s = A_t$، حيث A_t هو أحد عناصرT. أخيراً نفرض أن $\{A_r\}$ عدد غير منته من عناصر T فأن $\cup A_r$ أما أن يكون R أو يوجد عدد r_i يقع على يمين جميع المجموعات$\{A_r\}$ وفي هذه الحالة فأن $\cup A_r = A_{ri}$ وفي كلتا الحالتين فإن $\cup A_r$ عنصر في T . هذا يؤدي الى أن T تبولوجي على R ، يسمى هذا التبولوجي الأشعة اليسارية (Lrft ray topology) على R . واضح أن يمكن تكوين تبولوجيا على R باستخدام الأشعة اليمينية أي أن

$$T = \{A_r: r \in R\} \cup \{R , \phi\}$$

حيث $A_r = \{x \in R: x > r\}$ ويسمى هذا التبولوجي بتبولوجيا الأشعة اليمينية (right ray topology) ويترك للطالب تكون النوع الأخير.

اما اذا كانت A_i مجموعات مفتوحة (تنتمي الى T) فان $\cap A_i$ ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة كما مبين في المثال التالي :

مثال : ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي وان $A_n = (-1/n , 1/n)$ فترات مفتوحة في R حيث $n = 1,2, \ldots$ يلاحظ ان $\cap A_n = \{0\}$ مجموعة مغلقة في R وليست مفتوحة .

تعريف 2.1.3 : ليكن (X , T) فضاء تبولوجي . المجموعة الجزئية N من X تسمى جوار للنقطة $a \in X$ اذا كانت N تحتوي على مجموعة مفتوحة A بحيث ان a تنتمي الى A.

مبرهنة 3.1.3 : ليكن (X,T) فضاء تبولوجي . A مجموعة مفتوحة في X اذا وفقط اذا A جوار لكل نقطة من نقاطها .

البرهان : نفرض ان A مجموعة مفتوحة وان a عنصر ما ينتمي الى A. يمكن القول ان A جوار للنقطة a. بالعكس لتكن A جوار لكل نقطة من نقاطها، فان لكل نقطة a تنتمي الى A توجد مجموعة مفتوحة G_a بحيث ان $a \in G_a \subseteq A$. بما ان $\bigcup_{a\in A} G_a$ مجموعة مفتوحة في Xفان $A = \bigcup_{a\in A} G_a$ وهذا يعني ان A مجموعة مفتوحة .#

مبرهنة 4.1.3 : ليكن (X , T) فضاء تبولوجي وان a عنصر ما ينتمي الى X فان :

1 - يوجد على الاقل جوار واحد الى النقطة a.

2 - لكل جوار N للنقطة a فان a تنتمي الى N.

3 - اذا كان N جوار للنقطة a وان $N \subseteq M$ فان M جوار للنقطة a.

4 - اذا كان كل من N , M جوار للنقطة a فان تقاطع N مع M جوار للنقطة a.

5 - اذا كان N جوار للنقطة a يوجد جوار اخر M للنقطة a بحيث ان $M \subseteq N$ و M جوار لاي نقطة من نقاطه .

البرهان : 1) بما ان a نقطة من نقاط X فيمكن اعتبار X جوار للنقطة a. اما بالنسبة الى (2) ، (3) يمكن استنتاجهما مباشرة .

4) ليكن M, N جوار للنقطة a وبذلك توجد مجموعتين مفتوحتين B, A تحتوي على النقطة a وان $A \subseteq N$, $B \subseteq M$. هذا يعني ان $a \in A \cap B \subseteq N \cap M$. بما ان T تبولوجي على X فان $A \cap B$ مجموعة مفتوحة وبالتالي فان $N \cap M$ جوار للنقطة a.

5) بما ان N جوار للنقطة a فتوجد مجموعة مفتوحة M بحيث ان $a \in M \subseteq N$ وباستخدام المبرهنة (3.1.3) فان M جوار للنقطة a وبهذا ينتهي برهان المبرهنة . #

تعريف 3.1.5: ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و a نقطة ما تنتمي الى X. ان مجموعة جميع الجوارات B_a للنقطة a يسمى بنظام الجوارات

من هذا التعريف يمكن صياغة تعريف فضاء الجوارات بالشكل الاتي :

تعريف 6. 1.3 : لتكن X مجموعة غير خالية . لكل نقطة a تنتمي الى X فان B_a مجموعات جزئية من X تسمى جوارات للنقطة a اذا حققت شروط المبرهنة (4.1.3) ويسمى الفضاء الناتج بفضاء الجوارات . يمكن تعريف المجموعة المفتوحة في فضاء الجوارات كالاتي:

تعريف 7.1.3 : ليكن (X,T) فضاء جوارات و A مجموعة جزئية من X تسمى A مجموعة مفتوحة اذا كانت A جوار لكل نقطة من نقاطها .

الان يمكن استنتاج المبرهنة التالية :

مبرهنة 8.1.3 : ليكن (X , T) فضاء جوارات فان :

1- ϕ , X عنصران من عناصر T.

1- تقاطع عدد منته من مجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة في X.

2- اتحاد عدد غير منته من مجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة في X.

البرهان : بسهولة يمكن استنتاج البرهان وذلك باستخدام التعريف (7.1.3) والمبرهنة (4.1.3) ويترك للقارىء . #

بهذا يمكن القول بان لكل فضاء تبولوجي (X,T) يمكن تعريف جوارات على X ومن ثم تكوين نظام الجوارات فنحصل على فضاء جوارات على X ، وبالعكس اذا بدأنا بفضاء جوارات وعرف على X المجموعات المفتوحة كما في (7.1.3) نحصل على فضاء تبولوجي ومن هذه الملاحظة يمكن القول بانه يوجد تطابق (اقتران تقابلي) بين الفضاءات التبولوجية وفضاءات الجوارات الناشئة من الفضاءات التبولوجية .

في الفصل السابق اعطينا نوع اخر من انواع المجموعات في الفضاء المتري الا هي المجموعة المغلقة . يمكن صياغة تعريف المجموعة المغلقة في الفضاء التبولوجي مستخدمين نفس الاسلوب الذي طرق سابقا أي :

تعريف 9.1.3 : نسمي المجموعة الجزئية F من الفضاء التبولوجي (X , T) مجموعة مغلقة اذا كانت متممتها $(X - F)$ مجموعة مفتوحة في X.

مثال 1 : لكل فضاء تبولوجي (X , T) تكون المجموعتان X , ϕ مغلقتان . ان تعريف المجموعة المغلقة كافي لتحقيق هذا المثال .

مثال 2 : لتكن $X = R$ (R مجموعة الاعداد الحقيقية) وان T التبولوجيا الاعتيادية على X فان مجموعة الاعداد الصحيحة مجموعة مغلقة في X . هذا واضح لان متممة الاعداد الصحيحة هي $R - Z = \bigcup (n, n + 1)$ (حيث Z مجموعة الاعداد الصحيحة) وبالتالي فان اتحاد فترات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة وهذا يؤدي الى ان $R - Z$ مجموعة مفتوحة. وبالتالي فان Z مجموعة مغلقة في R.

مبرهنة 10.1.3 : لتكن $F = \{Fi\}_{i\in I}$ اسرة مجموعات مغلقة من الفضاء التوبولوجي (X,T) فان F تحقق الشروط الاتية :

1- المجموعتان X , ϕ مغلقتان .

2- تقاطع عدد غير منته من عناصر F هو عنصر ينتمي الى F.

3- اتحاد عدد منته من عناصر F هو عنصر ينتمي الى F.

البرهان : بما ان $\{Fi\}_{i\in I}$ اسرة جميع المجموعات المغلقة في X فان $X - F_i$ مجموعة مفتوحة في X (لكل $i\in I$). الشرط الاول سهل التحقيق فيترك للقارىء . اما بالنسبة الى الشرط الثاني لتكن $\{Fj\}_{j\in J}$ اسرة مجموعات مغلقة في F فان اتحاد جميع المجموعات $X - F_j$ (لكل $j\in J$) تساوي $X- \cap F_j$ بما ان $X - F_j$ مجموعة مفتوحة (لكل $j\in J$) فباستخدام الخاصية الثالثة من تعريف التبولوجي ينتج ان $X- (\cup F_j)$ مجموعة مفتوحة وبالتالي فان $\cap Fj$ مجموعة مغلقة وهذا يعني ان $\cap Fj$ عنصر من عناصر F. اخيرا لتكن $F_1 , F_2, \dots , F_n$ مجموعات مغلقة في F فان $X - F_i$ (لكل $i = 1,2,\dots, n$) مجموعة مفتوحة في X وبما ان (X , T) فضاء تبولوجي فان $\bigcap_{i\in 1}^{n} (X - F_i) = X - \bigcup_{i\in 1}^{n} F_i$ مجموعة مفتوحة في X وبذلك فان $\bigcup_{i\in 1}^{n} F_i$ عنصر من عناصر F. #

عند تعريف الفضاء التبولوجي قمنا بتعريف اسرة المجموعات باستخدام تعريف المجموعة المفتوحة وبذلك يمكن القول بان التبولوجي عرف باستعمال مفهوم المجموعة المفتوحة . لكن يمكن تعريف التبولوجي T بالاعتماد على مفهوم المجموعة المغلقة كما يلي .

مبرهنة 11.1.3 : لتكن X مجموعة غير خالية وان F اسرة من المجموعات الجزئية من X تحقق الشروط الاتية :

1- المجموعتان X, ϕ ينتميان الى F.

1- تقاطع عدد غير منته من عناصر F هو عنصر في F.

3- اتحاد عدد منته من عناصر F هو عنصر في F.

فانه يوجد تبولوجي T على X عناصره متممات عناصر الاسرة F.

البرهان : يكفي ان نعرف التبولوجيا T على X بالشكل الاتي :

$$T = \{A \subseteq X : X - A \in F\}$$

من التعريف للتبولوجيا يمكن بسهولة تحقيق شروط التبولوجي المذكورة سابقا . #

كما لاحظنا في تعريف التبولوجي كان الشرط الثاني يعتمد على ان المجموعات المفتوحة المتقاطعة عددها منته بينما في المبرهنة اعلاه اعتمد الشرط الثالث على ان تكون عدد المجموعات المغلقة المتحدة ذات عدد منته وسبب ذلك سنوضحه في المثال التالي :

مثال : ليكن (R,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي و $F_n = [1/n,1]$ واضح ان F_n مجموعات مغلقة في R وان $\cup F_n = (0,1]$ يلاحظ ان الفترة [0,1) ليست مغلقة في R. هذا يؤدي الى ان الاتحاد لعدد غير منته من مجموعات مغلقة ليس بالضرورة مجموعة مغلقة .

اما المثال الأتي يبين صحة تطبيق المبرهنة اعلاه :

مثال : لتكن X مجموعة غير منتهية و $F = \{ B \subseteq X :$ مجموعة منتهية $B \} \cup \{X\}$

واضح ان F تحقق شروط المبرهنة (11.1.3) وبهذا يمكن بناء تبولوجي T على المجموعة X بدلالة المجموعة F.

2.3 : قاعدة الفضاء التبولوجي

كل بناء رياضي يعتمد على ركائز معينة يقوم عليه البناء . ففي إنشاءنا للفضاء التبولوجي اعتمدت طريقتنا بشكل أساسي على فكرة المجموعات المفتوحة . في حالات كثيرة يمكن معرفة جميع المجموعات المفتوحة في فضاء تبولوجي معين وذلك بمعرفة جزء من هذه المجموعات فمثلا لو اخذنا الفضاء التبولوجي المتكون من المجموعة $X = \{1,2,3\}$ والتبولوجي $T = \{ \phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\} , \{2,3\} , X\}$. فان بمعرفة المجموعات

$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ يمكن معرفة جميع المجموعات المفتوحة الغير خالية الاخرى وذلك بالاعتماد على مبدأ اتحاد المجموعات أي ان لكل مجموعة مفتوحة يمكن كتابتها على شكل اتحاد بعض او كل من المجموعات الثلاث أعلاه . ان مجموعة هذا النوع من المجموعات التي يمكن بواسطتها معرفة كل المجموعات الغير خالية الاخرى نطلق عليها اسم قاعدة الفضاء التبولوجي

.(base of the topological space)

تعريف 1.2.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا وB اسرة من المجموعات المفتوحة بحيث $B \subseteq T$. نسمي B قاعدة للتبولوجي T إذا وفقط إذا لكل عنصر لايساوي المجموعة الخالية من عناصر T يمكن كتابته على شكل اتحاد بعض او كل عناصر B.

مثال : لتكن $X = \{a, b, c\}$ وان $T = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}$

التبولوجي المعرف على X . من خلال النظر للمجموعة $\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ يمكننا القول بان جميع المجموعات الغير خالية الاخرى العائدة للتبولوجي T يمكن كتابتها من خلال المجموعات الثلاث أعلاه وذلك باتحاد عدد من هذه المجموعات وبهذا فأنها تمثل قاعدة لهذا التبولوجي . نلاحظ ان الاسرة المتكونة من المجموعات $\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\}\}$ هي الاخرى تمثل قاعدة لهذا التبولوجي وبهذا يمكن القول بان الفضاء التبولوجي قد يمتلك عدد كبير من القواعد التبولوجية للتبولوجي الواحد أي ان :

مبرهنة 2.2.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا وB قاعدة للتبولوجي T ولتكن B_1 اسرة مجموعات مفتوحة بحيث ان $B \subseteq B_1 \subseteq T$. فان$B_1$ قاعدة للتبولوجي T . وكحالة خاصة ان T هي قاعدة لنفسها .

البرهان : بسيط ويترك كتمرين . #

مثال 1: لتكن $X = \{a,b,c,d\}$ والتبولوجي T هو $T = \{\phi, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, X\}$. واضح ان الفضاء التبولوجي (X,T) يمتلك قاعدة وحيده هي T (لان أي عنصر من عناصرT لا يمكن كتابته بدلالة اتحاد عناصر أخرى من T.

مثال 2: لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و T التبولوجيا الاعتيادية على R. ولتكن B اسرة الفترات المفتوحة من R. ان الاسرة B تمثل قاعدة للفضاء التبولوجي الحقيقي وذلك لان

كل مجموعة مفتوحة في T هي عبارة عن اتحاد فترات مفتوحة من R وهذه الفترات تنتمي الى B.

مثال 3: ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا بحيث ان T هي التبولوجيا القوية على X. واضح ان اسرة المجموعات المفتوحة والحاوية لعنصر واحد فقط تشكل قاعدة للتبولوجي T أي ان المجموعة$B = \{\{x\} : x\in X\}$ تمثل قاعدة للتبولوجي T.

مبرهنة 3.2.3 : لتكن B اسرة من المجموعات المفتوحة في الفضاء التبولوجي (X,T). فان B قاعدة للتبولوجي T إذا وفقط إذا لكل $x\in X$ و N جوار الى x يوجد عنصر W في B بحيث ان $x \in W \subseteq N$

البرهان : نفرض أولا ان B قاعدة للتبولوجي T ولتكن x نقطة ما من نقاط X و N جوار للنقطة x.

اذن توجد مجموعة مفتوحة مثلV بحيث ان $x \in V\subseteq N$ (من تعريف الجوار) . الآن بما ان B قاعدة للتبولوجي T و Vمجموعة مفتوحة من X فان V تساوي اتحاد لعدد من عناصرB وهذا يؤدي الى وجود عنصر W في B بحيث ان $x \in W \subseteq V \subseteq N$. بالعكس لتكن W مجموعة مفتوحة في X وليكن x عنصر ما في W فيمكن اعتبار W جوار للنقطة x واستنادا الى الفرض توجد مجموعة W_xمنB بحيث ان $x\in W_x \subseteq W$ وبهذا فلكل عنصر من عناصر W يوجد عنصر في B يحقق المتباينة أعلاه وهذا يؤدي الى آن $W = \bigcup_{x\in w} Wx$.
وبالتالي فان B قاعدة للتبولوجي T. #

مبرهنة 4.2.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا و B_1 قاعدة للتبولوجي T. ولتكن B_2 اسرة من المجموعات المفتوحة في X فان B_2 قاعدة للتبولوجي T إذا كان لكل عنصر $x\in X$ و W_1 مجموعة مفتوحة من B_1 تحتوي على x فتوجد مجموعة مفتوحة W_2 في B_2 بحيث أن $x \in W_2 \subseteq W_1$.

البرهان : واضح باستخدام تعريف الجوار والمبرهنة (3.2.3) . #

مثال : ليكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و T التبولوجيا الاعتيادية على R، ولتكن B_1 اسرة جميع الفترات المفتوحة من R و B_2 اسرة جميع الفترات المفتوحة من R بحيث أطرافها أعداد نسبية . يمكن طرح السؤال التالي هل ان B_2 قاعدة للتبولوجي T.

الحل : واضح ان B_1 قاعدة للتبولوجي T. الآن نبرهن ان B_2 هي الاخرى قاعدة للتبولوجي T. نفرض ان x عنصر ما من عناصر X وان $W_1 = (a,b)$ فترة مفتوحة من R تحتوي على العنصر x ، أي ان $a< x< b$ وبهذا فان W_1 ينتمي الى B_1. بما ان لكل عددين حقيقيين غير متساويين يوجد عدد نسبي بينهما ، اذن يوجد عددان نسبيان مثل p,q بحيث ان $a < p < x < q < b$. واضح ان الفترة (p,q) ، عنصر من عناصر B_2 أي ان $X \in (p , q) \subseteq (a , b)$. وباستخدام المبرهنة (4.2.3) نستنتج ان B_2 قاعدة للتبولوجي T يلاحظ ان القاعدة B_2 تحتوي على عناصر قابلة للعد .

مبرهنة 5.2.3 : ليكن $(X ; T)$ فضاءا تبولوجيا و B_1 قاعدة للتبولوجي T و B_2 اسرة من المجموعات المفتوحة في X فان B_2 قاعدة للتبولوجي T اذا كان لاي عنصر من عناصر B_1 يمكن كتابته بشكل اتحاد لعدد من عناصر B_2.

البرهان: لتكن A مجموعة مفتوحة في X. بما ان B_1 قاعدة للتبولوجي T فان $A = \bigcup_{i\in I} V_i$ حيث V_i عنصر من عناصر B_1 (لكل $i\in I$) . كذلك فان أي عنصر V_i (لكل $i\in I$) يمكن كتابته على شكل اتحاد لعدد من عناصر B_2 أي ان $V_i =\bigcup_{j\in J} W_i$ وهذا يؤدي الى ان A يمكن كتابته على شكل اتحاد لعدد من عناصر B_2 وبالتالي فان B_2 قاعدة للتبولوجي T.   #

مبرهنة 6.2.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X ، ولتكن B قاعدة للتبولوجي T فان A مجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا A تساوي اتحاد لعدد من عناصر B.

البرهان : يترك كتمرين .   #

مبرهنة 7.2.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا و B قاعدة للتبولوجي T فان :

1) المجموعة X تساوي اتحاد لعدد من عناصر B.

2) اذا كان W_2 , W_1 عنصريين في B فان تقاطعهما يشكل اتحاد لعدد من عناصر B.

البرهان : 1) بما ان X مجموعة مفتوحة فينتج المطلوب الاول بالاستناد الى المبرهنة (6.2.3) .

2) بما ان W_2 ,W_1 مجموعتين مفتوحتين فان $W_2 \cap W_1$ مجموعة مفتوحة . هذا يعني من

المكن كتابة المجموعة $W_2 \cap W_1$ على شكل اتحاد لعدد من عناصر B (لان B قاعدة للتبولوجي T). #

من المبرهنتين السابقتين يمكن ايجاد طريقة اخرى لتعريف التبولوجيا وذلك باستخدام مفهوم القاعدة وهاتان المبرهنتان تشكلان الركيزتين الأساسيتين لهذا التعريف لانهما تشيران الى الشروط التي يجب ان تحققها اسرة المجموعات الجزئية من X لكي تكون قاعدة للتبولوجي من جهة ومن جهة اخرى تحدد المجموعات المفتوحة من X للتبولوجي المطلوب بناءه.

مبرهنة 8.2.3 : لتكن X مجموعة غير خالية و B اسرة من المجموعات الجزئية من X بحيث ان B تحقق مايلي :

1) يمكن كتابة X على شكل اتحاد لعدد من عناصر B.

2) لكل A_1 ، A_2 عنصران ينتميان الى B فان تقاطعهما يمكن كتابته على شكل اتحاد لعدد من عناصر B. فان الاسرة T المؤلفة من كل المجموعات المساوية لاتحاد عناصر من B تشكل تبولوجي على X وانها التبولوجيا الوحيدة التي قاعدتها B.

البرهان : لكي نبرهن ان T تبولوجي على X يجب ان نحقق شروط التبولوجي الثلاث :

1- واضح ان المجموعتين ϕ ، X عناصر في T.

2- لتكن A_1 , A_2 عنصران من عناصر T. فان A_1 , A_2 يمكن كتابتهما على شكل اتحاد لعدد من عناصر B؛ أي ان

$$A2 = \bigcup_{j\in J} Aj , \quad A1 = \bigcup_{i\in I} Ai$$

حيث ان A_i , A_j عناصر في B (لكل $i\in I$ ولكل $j\in J$) وبالتالي فان

$$A_1 \cap A_2 = (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap A_j)$$

بالاعتماد على تعريف T ينتج ان $A_1 \cap A_2$ عنصر ينتمي الى T . اما الشرط الاخير من شروط التبولوجي يمكن تحقيقه بسهولة من تعريف T. وبالتالي فان T تبولوجي على X. كما انه التبولوجي الوحيد وذلك لنفرض ان S تبولوجي اخر على X بحيث ان B قاعدة الى S. بسهولة يمكن برهان ان التبولوجيان T، S متساويتان . هذا يؤدي الى ان T هي التبولوجيا

الوحيدة التي قاعدتها B. #

مثال 1 : لتكن R مجموعة الاعداد الحقيقية و B اسرة كل الفترات المفتوحة من R. واضح ان الاسرة B تحقق شروط المبرهنة (8.2.3). هذا يعني ان بالامكان بناء تبولوجي وحيد قاعدته B وعناصره المجموعات المساوية لاتحاد عناصر من B (أي لاتحاد فترات مفتوحة) وبهذا نحصل على الفضاء التبولوجي الحقيقي . هذا يؤدي الى امكانية بناء تبولوجي على أي مجموعة اذا عرفنا قاعده للتبولوجي المطلوب انشاءه .

مثال 2 : لتكن $X = \{a,b,c\}$ و B تمثل المجموعات الجزئية المنفردة من X أي ان $B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ واضح ان B تحقق شروط المبرهنة (8.2.3) وان التبولوجيا التي تبنى على المجموعة X وقاعدتها B هي التبولوجيا القوية و بذلك فانها وحيدة .

من المبرهنة (8.2.3) يمكن الأستدلال بأننا إذا حققت B شروط معينة على المجموعة X فأن B (حيث B مجموعات جزئية من X) تولد تبولوجيا على X قاعدتها B. في هذا الجزء سنبين عند تعريف القاعده الجزئية (Subbase) على مجموعة X ستولد تبولوجي على X.

تعريف 9.2.3: ليكن (X,T) فضاء تبولوجيا. تسمى B قاعده جزئية الى تبولوجيا T اذا كانت B تمثل مجموعات جزئية من X وتحقق الشروط الآتية:

1) لكل $B_i \in B$ فإن $B_i \in T$.

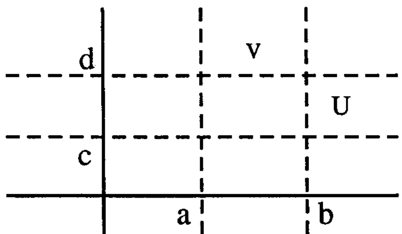
2) لكل $\{B_i\}_{i=1}^{m}$ عناصر من B فإن تقاطع هذه العناصر مع X يولد قاعدة للتبولوجي T. أي أن تقاطع هذه العناصر مع X يولد قاعدة للتبولوجي T . أي أن تقاطع كل عدد منته من عناصر B مع X تمثل قاعده الى T.

مثال 1 : لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية وأن $B = \{ A \subseteq R : A = (r,\infty)$ و $A = (-\infty, r) , r \in R$ حيث $\}$ فإن B تمثل قاعدة جزئية للتبولوجيا الحقيقية T.

الحل: واضح أن كل عنصر من عناصر B هو عنصر من عناصر T، وبما أن جمع الفترات المفتوحة تمثل قاعده للتبولوجيا T وفي نفس الوقت أن أي عنصر من هذه القاعدة (الفترة المفتوحة) يمكن كتابتها على شكل تقاطع عنصرين من عناصر B.

مثال 2 : لتكن (R^2, T) الفضاء التبولوجي الأقليدي للمستوى فإن المستطيلات المفتوحة

تمثل قاعدة للتبولوجي T. أي أن عناصر هذه القاعدة من نوع $I = J \times K$ حيث أن J , K فترات مفتوحة في R. لتكن B مجموعة الأشرطة المفتوحة في R^2 أي أن عناصر B تكون على النحو الآتي: $V = \{(x , y) \in R^2: x \in (a , b)\}$ أو $V = \{(x , y) \in R^2: y \in (c , d)\}$ وأن d, c, b, a عناصر في R. أي أن عناصر B يمثلها الشكل ادناه.



واضح أن B تمثل قاعدة جزئية للتبولوجيا الأقليدية T.

مبرهنة 10.2.3 : ليكن (X, T) فضاءاً تبولوجياً وأن B قاعدة جزئية للتبولوجي T وتكتب بالشكل $B = \{ B_i: i \in I\}$. ولتكن A مجموعة جزئية من X غير خالية. فإن A مجموعة مفتوحة في X اذا وفقط اذا لكل $a \in A$ يوجد $\{B_i\}_{i=1}^{m}$ عدد منته من عناصر B بحيث أن $a \in \bigcap_{i=1}^{m} B_i \subseteq A$.

البرهان: نفرض أول A مجموعة مفتوحة وأن a عنصراً ينتمي الى A . من تعريف القاعدة الجزئية نحصل على مجموعة عناصر منتهية منB ولتكن $\{B_i\}_{i=1}^{m}$ بحيث أن $A = \bigcup_{j \in J} (\bigcap_{i=1}^{m} B_{ij})$.

هذا يؤدي الى أن $a \in \bigcap_{i=1}^{m} B_i \subseteq A$.

أما الاتجاه الثاني ينتج على اعتبار $\bigcap_{i=1}^{m} B_i$ جوار للنقطة a وبهذا فإن A مجموعة مفتوحة.

3.3 : نقاط الفضاء التوبولوجي

لدراسة النقاط في الفضاء التبولوجي يمكن النظر لاي نقطة كما لو كانت في الفضاء المتري لسهولة دراستها .

لتكن A مجموعة جزئية من X و x نقطة ما من نقاط X يمكن طرح السؤال الاتي : ما هو

مقدار قرب النقطة x من المجموعة A (بمفهوم المسافة الأقليدية) هذا ما سنبينه في هذا الجزء من الفصل.

تعريف 1.3.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X. تسمى النقطة x نقطة انغلاق للمجموعة A اذا وفقط اذا لكل مجموعة مفتوحة U تحتوي على النقطة x فان U تتقاطع مع A أي $A \cap U \neq \phi$. ونسمي مجموعة هذه النقاط بمجموعة انغلاق A و يرمز لها بالرمز $\bar{A}$.

مثال : ليكن (R,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي فما هي مجموعة انغلاق المجموعة A في الحالات التالية :

1- $A = (a,b]$ حيث a , b اعداد حقيقية تنتمي الى R.

2- $A = N$ (حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة) .

3- $A = Q$ (حيث Q مجموعة الأعداد النسبية (Rational numbers)) .

الحل : من تطبيق التعريف على الحالات الثلاثة ينتج ان مجموعة انغلاق A في الحالة الأولى هي الفترة المغلقة $[a,b]$. في الحالة الثانية هي المجموعة N نفسها اما في الحالة الأخيرة هي المجموعة R.

مبرهنة 2.3.3: ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X فان A مجموعة جزئية من $\bar{A}$ أي أن $A \subseteq \bar{A}$.

البرهان : ينتج من تعريف مجموعة الانغلاق . #

المبرهنة التالية تربط مجموعة الانغلاق بالمجموعة المغلقة التي سبق وان تطرقنا اليها .

مبرهنة 3.3.3: ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X ولتكن F مجموعة مغلقة في X تحتوي على المجموعة A فان $\bar{A}$ مجموعة جزئية من المجموعة F أي أن $\bar{A} \subseteq F$.

البرهان : بما ان A مجموعة جزئية من F أي $A \subseteq F$ فان $C(F) \subseteq C(A)$ و هذا يعني ان $A \cap C(F) = \phi$. لتكن x لا تنتمي الى المجموعة F فان x تنتمي الى $C(F)$ وهذا يعني ان $x \notin A$ بما ان $C(F)$ مجموعة جزئية مفتوحة من X فان $x \notin \bar{A}$ وهذا يؤدي الى ان

$x\in C(\bar{A})$ وبالتالي فان $C(\bar{A})$ ⊇ $C(F)$. اذن F ⊇ $\bar{A}$. #

مبرهنة 4.3.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا وA مجموعة جزئية من X. ولتكن x نقطة لا تنتمي الى مجموعة انغلاق A أي $x\notin \bar{A}$. توجد مجموعة مغلقة F تحتوي على A بحيث ان x لا تنتمي الى F.

البرهان : بما ان $x\notin \bar{A}$ هذا يعني وجود مجموعة مفتوحة B بحيث ان $x\in B$ وان $B\cap A=\phi$. لتكن $F=C(B)$. واضح ان F مجموعة مغلقة تحتوي على A وان $x\notin F$. #

مبرهنة 5.3.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X فان $\bar{A}$ تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة الحاوية على المجموعة A.

البرهان : واضح من المبرهنة (2.3.3) ان A مجموعة جزئية من $\cap F_i$ (حيث F_i مجموعة مغلقة تحتوي على A لكل i) . نفرض ان $x\in \cap F_i$ فان $x\in F_i$ (لكل i) . هذا يعني ان $x\in\bar{A}$ (باستخدام المبرهنة (3.3.3)) وهذا يؤدي الى ان $\cap F_i \subseteq \bar{A}$ وبالتالي فان $\bar{A}=\cap F_i$.

ملاحظة : بما ان تقاطع أي عدد من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة (انظر المبرهنة (10.1.3) و المبرهنة (5.2.3)) نحصل على ان $\bar{A}$ مجموعة مغلقة تحتوي على المجموعة A وبالتالي فيمكن القول ان $\bar{A}$ اصغر مجموعة مغلقة تحتوي على المجموعة A و هذا يؤدي الى:

مبرهنة 6.3.3 : ليكن (X,T) فضاءا توبولوجيا و A مجموعة جزئية من X فان A مجموعة مغلقة اذا و فقط اذا $\bar{A}=A$.

البرهان : لتكن A مجموعة مغلقة فان $\bar{A}\subseteq A$ (باستخدام المبرهنة (5.2.3)) ومن المبرهنة (4.2.3) نحصل على $\bar{A}\subseteq A$ وبالتالي فان $A=\bar{A}$. الاتجاه المعاكس يترك كتمرين للقارىء. #

من المبرهنة ادناه نستدل على ان بالامكان بناء فضاء تبولوجي ويمكن تسميته بفضاء الانغلاق و يمكن البرهنة على ان فضاءات الانغلاق مطابقة للفضاءات التبولوجية المرادفة لها .

مبرهنة (7.3.3) : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا فان :

1- $\bar{X}=X$.

2- $\bar{\phi}=\phi$.

3- لتكن A , B مجموعتين جزئيتين من X فان $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

البرهان : 1- من المبرهنة (4.2.3) نستنتج ان $\overline{X} \subseteq X$ و بهذا فان $X = \overline{X}$.

2 - نفرض ان x نقطة تنتمي الى X وان A مجموعة مفتوحة تحتوي على النقطة x. واضح ان $A \cap \phi = \phi$ وهذا يعني ان $\overline{\phi}$ مجموعة خالية وبالتالي فان $\overline{\phi} = \phi$.

3- لتكن $x \in \overline{A \cup B}$. اذن لكل مجموعة مفتوحة N تحتوي على x فان

$N \cap (A \cup B) \neq \phi$ او $(N \cap A) \cup (N \cap B) \neq \phi$ واضح ان اما $N \cap B \neq \phi$. او $N \cap A \neq \phi$ لو فرضنا ان $N \cap B \neq \phi$ فان $x \in \overline{B}$ وبالتالي فان $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. من جهة اخرى بما ان $A \subseteq \overline{A}$, $B \subseteq \overline{B}$ فان $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. هذا يعني ان $A \cup B$ مجموعة مغلقة تحتوي على $A \cup B$ وهذا يؤدي الى ان $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ و بالتالي فان $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. #

اما العلاقة بين المجموعتين $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ فيمكن للطالب مناقشتها كما وردت في اسئلة هذا الفصل .

مثال : لتكن X مجموعة غير منتهية و T هي تبولوجيا المتممات المنتهية على المجموعة X، أي ان $T = \{ B \subseteq X : X - B \text{ مجموعة منتهية} \} \cup \{\phi\}$.

لتكن A مجموعة جزئية من X. سنوجد مجموعة انغلاق A في حالة A مجموعة منتهية وفي حالة A مجموعة غير منتهية .

1- لتكن A مجموعة منتهية هذا يؤدي الى ان A مجموعة مغلقة وبالتالي فان $\overline{A} = A$.

2 - نفرض ان A مجموعة غير منتهية ، سوف نبرهن على ان لكل نقطة $x \in X$ فان x نقطة انغلاق للمجموعة A وبعبارة اخرى ان $\overline{A} = X$. لتكن $x \in X$ و B مجموعة مفتوحة تحتوي على x. نفرض ان $B \cap A = \phi$ و بهذا فان $A \subseteq X - B$.

أي ان A مجموعة منتهية (خلاف الفرض اعلاه). اذن A تتقاطع مع B وبذلك فان x نقطة انغلاق للمجموعة A.

من المثال اعلاه نستنتج ان بعض المجموعات تمتاز بان مجموعة انغلاقها تساوي المجموعة الكلية للفضاء التبولوجي . لهذا النوع من المجموعات دور مهم في الفضاءات التبولوجية لذا سنذكر تعريف هذه المجموعات .

تعريف 8.3.3 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X. تسمى A مجموعة كثيفة (dense set) في X اذا وفقط اذا $\overline{A} = X$.

مبرهنة 9.3.3 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X. فان A مجموعة كثيفة اذا وفقط اذا لكل مجموعة مفتوحة غير خالية B فان $A \cap B \neq \phi$.

البرهان : لتكن A مجموعة كثيفة أي ان $\overline{A} = X$ ولتكن B مجموعة مفتوحة غير خالية من X، ولتكن $b \in B$ فان $A \cap B \neq \phi$ (لان أي نقطة من نقاط X اما ان تنتمي الى A او نقطة انغلاق للمجموع A) . بالعكس لتكن x نقطة ما في X و B مجموعة مفتوحة تحتوي على x بحيث ان $A \cap B \neq \phi$ فان x نقطة انغلاق للمجموعة A وبالتالي فان $X \subseteq \overline{A}$. #

مثال : لتكن $X = R$ مجموعة الأعداد الحقيقية وان T التبولوجيا الاعتيادية على X ولتكن $A = Q$ مجموعة الأعداد النسبية فان A مجموعة كثيفة في X.

الحل : نفرض ان $\overline{Q} \neq R$ هذا يعني وجود عنصر x ينتمي الى R ولا ينتمي الى $\overline{Q}$. أي توجد فترة مفتوحة مثل (a,b) تحتوي على x ولا تتقاطع مع Q وهذا يناقض مبرهنة ارخميدس التي تنص على : لكل عددين حقيقيين غير متساويين يوجد عدد نسبي بينهما وبالتالي فان $\overline{Q} = R$.

الان ننتقل الى مجموعة اخرى في نفس المجال والتي تسمى بالمجموعة المشتقة (Derived set).

تعريف 10.3.3: ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X. نفرض ان x نقطة ما تنتمي الى X. تسمى النقطة x بنقطة تراكم (Accumulation point) للمجموعة A اذا وفقط اذا لكل مجموعة مفتوحة B تحتوي على النقطة x فان تقاطع A مع B يحوي على الاقل نقطة أخرى تختلف عن x وتسمى مجموعة هذه النقاط بالمجموعة المشتقة للمجموعة A ويرمز لها بالرمز A' ، بعبارة اخرى $(B - \{x\}) \cap A \neq \phi$.

لاحظ ان تعريف نقطة تراكم مجموعة هو نفس تعريف النقطة الحدية التي بحثناها في موضوع الفضاءات المترية . كذلك يمكن الاستنتاج بان أي نقطة تراكم لمجموعة هي نقطة انغلاق لنفس المجموعة و لكن العكس ليس صحيح بشكل عام .

ملاحظة : اذا كانت x نقطة انغلاق للمجموعة A بحيث ان x لا تنتمي الى A فان x نقطة تراكم الى A. البرهان ينتج مباشرة من التعريفيين .

مبرهنة 11.3.3 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X فان اتحاد نقاط التراكم (المجموعة المشتقة) للمجموعة A مع المجموعة A تنتج مجموعة الانغلاق الى A أي ان $\bar{A} = A \cup A'$.

البرهان : يترك كتمرين . #

مثال : لتكن $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

و $T = \{ \phi , \{1\} , \{2,3\} , \{1,2,3\} , \{2, 3, 4, 5,\} , X\}$

فان (X , T) فضاء تبولوجي يمتلك ستة من المجموعات المفتوحة . اما مجموعاته المغلقة فهي $\{X, \{2, 3, 4, 5, \} , \{1, 4, 5, \{4, 5\}, \{1\}, \phi\}$.

من هذا نلاحظ ان المجموعتين $\{1\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$ مفتوحتان و مغلقتان في (X, T) بالاضافة الى X, ϕ. كذلك ان المجموعة الجزئية $\{ 1 , 3 \}$ هي مجموعة كثيفة في (X , T) وسبب ذلك لانها تتقاطع مع جميع المجموعات المفتوحة الغير خالية من X. من جهة اخرى ان المجموعة $\{1, 2, 3\}$ هي الاخرى مجموعة كثيفة في (X , T) وان النقطة (2) هي نقطة تراكم للمجموعة $\{1, 2, 3\}$ اما النقطة (1) هي نقطة انغلاق للمجموعة نفسها وليست نقطة تراكم لها ان مجموعة نقاط التراكم للمجموعة $\{1, 2, 3\}$ (المجموعة المشتقة) هي المجموعة $\{2, 4, 5\}$ وهكذا نجد ان النقطة (2) تنتمي للمجموعة $\{1,2,3\}$ وفي نفس الوقت هي نقطة تراكم لها . هذا المثال يبين ان نقطة الانغلاق ليس بالضرورة ان تكون نقطة تراكم .

الآن نتطرق الى نوع آخر مهم من نقاط الفضاء التبولوجي هي ما تسمى بالنقاط الداخلية (Interior Points).

تعريف 12.3.3 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X. ولتكن x نقطة ما تنتمي الى X. تسمى النقطة x بنقطة داخلية للمجموعة A اذا وفقط اذا توجد مجموعة مفتوحة مثل B تحتوي على x و B جزئية من A. واضح ان النقطة x تنتمي الى A. تسمى مجموعة هذه النقاط بالمجموعة الداخلية الى A ويرمز لها بالرمز $In (A)$.

مثال : ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي سوف نوجد $In (A)$ في كل من الحالات الآتية:

1) اذا كانت $A = (a , b]$ حيث a,b اعداد حقيقية.

2) $A = N$ حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية.

3) $A = Q$ حيث Q مجموعة الأعداد المسبية.

الحل: واضح من التعريف أن النقاط الداخلية تنتمي الى المجموعة A.

1- لتكن $x \in A$ بحيث أن $X \neq b$ نفرض أن r يمثل اصغر العدديين $|x - b| , |a - x|$.

ونفرض أن $B = (-\frac{r}{2} , \frac{r}{2})$ واضح أن $x \in B$ وأن $B \subseteq A$ هذا يؤدي الى أن $x \in In (A]$
أما النقطة b(*) فانها لا تنتمي الى $I_n(A)$ والسبب في ذلك لأن أي فترة مفتوحة تحتوي على b تتقاطع مع متممة A ، هذا يؤدي الى أن $In (A) = (a,b)$.

2- في هذه الحالة فأن $In (A) = \phi$ هي مجموعة خالية ويعود السبب في ذلك لأن اي مجموعة مفتوحة تحتوي على عدد طبيعي تحتوي على اعداد غير طبيعية وبالتالي فإن اي مجموعة غير محتواة في A.

3- المجموعة الداخلية في هذه الحالة هي ايضاً المجموعة الخالية ونترك للقارىء بيان ذلك.

مبرهنة 13.3.3 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X ولتكن B مجموعة مفتوحة محتواة في A فان جميع نقاط B داخلية بالنسبة الى A.

البرهان : لكل نقطة b تنتمي الى B يمكن اعتبار B المجموعة المفتوحة التي تحتوي على b وهي مجموعة جزئية من A وهذا يؤدي الى ان b نقطة داخلية بالنسبة للمجموعة A. #

مبرهنة 3 .3 . 14 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X فان

$$In (A) = \bigcup_{i \in I} B_i$$

حيث $\{B_i\}_{i \in I}$ اسرة جميع المجموعات الجزئية المفتوحة من A.

البرهان : لتكن $x \in In (A)$ ، يوجد B_j بحيث ان $x \in B_j$ و $B_j \subseteq A$ و B_j مجموعة مفتوحة محتواة في A ، هذا يؤدي الى ان $x \in \bigcup_{i \in I} B_i$ فان $\bigcup_{i \in I} B_i \quad In (A)$.

وبالعكس نفرض ان $x \in \bigcup_{i \in I} B_i$ ، اذن يوجد $k \in I$ بحيث ان $x \in B_k$. بما ان B_k مجموعة

مفتوحة جزئية من A فان x نقطة داخلية بالنسبة الى A وبالتالي فان $x\in In(A)$ وهذا يؤدي الى $\bigcup_{i\in I} B_i \subseteq In(A)$ وبالتالي $In(A) = \bigcup_{i\in I} B_i$. #

مبرهنة 15.3.3 : ليكن (X, T) فضاء تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X فان

1 – المجموعة الداخلية الى A هي اكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A.

2 – اذا كانت $B\subseteq A$ فان $In(B) \subseteq In(A)$.

البرهان : 1– لتكن B مجموعة مفتوحة محتواة في A وإن x نقطة ما من نقاط B. فان $x\in In(B)$ وهذا يؤدي الى ان $x\in In(A)$ وبالتالي فان $B\subseteq In(A)$. أي ان لكل مجموعة مفتوحة محتواة في A فانها جزئية من $In(A)$. واضح ان $In(A)$ مجموعة مفتوحة . هذا يعني ان $In(A)$ اكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A.

2 – لتكن y نقطة تنتمي الى المجموعة $In(B)$. فان y نقطة داخلية بالنسبة الى B وهذا يعني وجود مجموعة D مفتوحة جزئية من B تحتوي على العنصر y أي ان $y\in D\subseteq B$ وهذا يؤدي الى ان $D\subseteq A$ وبذلك فان $y\in In(A)$ وهو المطلوب . #

مبرهنة 16.3.3: لتكن A مجموعة جزئية في الفضاء التبولوجي (X,T) فان A مجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا $A = In(A)$.

البرهان : باستخدام تعريف المجموعة الداخلية والمبرهنة (15.3.3) ينتج البرهان بسهولة #

مبرهنة 17.3.3 : ليكن (X , T) فضاء تبولوجيا و A , B مجموعتان جزئيتان من X فان :

1- $In(X) = X$.

2 - $In(In(A)) = In(A)$.

3 - $In(A\cap B) = In(A)\cap In(B)$.

البرهان :1– بما ان X مجموعة مفتوحة وجزئية من X فان $In(X) = X$ باستخدام المبرهنة (16.3.3) مباشرة.

2– من المبرهنة (14.3.3) نحصل على ان $In(A)$ مجموعة مفتوحة في A وباستخدام المبرهنة (16.3.3) نحصل على النتيجة المطلوبة .

3- بما ان $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$ فان $In(A \cap B) \subseteq In(A)$ و $In(A \cap B) \subseteq In(B)$ وهذا يؤدي الى ان $In(A) \cap In(B)$ يحتوي على المجموعة $In(A \cap B)$. بالعكس بما ان $In(A) \cap In(B) \subseteq In(A) \subseteq A$ وان $In(A) \cap In(B) \subseteq In(B) \subseteq B$ من هذا ينتج ان $In(A) \cap In(B) \subseteq A \cap B$ ولكن $In(A) \cap In(B)$ مجموعة مفتوحة. باستخدام المبرهنة (16.3.3) ينتج ان $In(A) \cap In(B) = In(In(A) \cap In(B)) \subseteq In(A) \cap In(B)$ ومنها نحصل على المساواة المطلوبة . #

مبرهنة 18.3.3 : لتكن A مجموعة جزئية في الفضاء التبولوجي (X, T) فان

$$In(A) = C(\overline{C(A)})$$

البرهان : لتكن a نقطة داخلية للمجموعة A فان $a \in A$ و هذا يؤدي الى ان $a \notin C(A)$. ندعي بان $a \notin \overline{C(A)}$. لبرهان الادعاء نفرض العكس أي ان $a \in \overline{C(A)}$. هذا يؤدي الى ان a نقطة انغلاق للمجموعة $C(A)$ أي لكل مجموعة مفتوحة تحتوي على العنصر a يجب ان تتقاطع مع $C(A)$ وهذا يناقض ان a نقطة داخلية في A. اذن $a \notin \overline{C(A)}$ وهذا يعني ان $a \in C(\overline{C(A)})$ وبالتالي فان $In(A) \subseteq C(\overline{C(A)})$. بالعكس نفرض ان $b \in C(\overline{C(A)})$ فان $b \notin \overline{C(A)}$ وهذا يعني وجود مجموعة مفتوحة مثل B تحتوي على النقطة b وان $B \cap C(A) = \phi$. هذا يؤدي الى ان $B \subseteq A$ أي ان $b \in In(A)$ وبهذا تتحقق المساواة المطلوبة . #

مبرهنة 19.3.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X فان :

1 - $C(In(A)) = \overline{C(A)}$.

2 - $C(\overline{A}) = In(C(A))$.

البرهان : 1- حسب المبرهنة (18.3.3) يمكن اخذ متممة الطرفين للمعادلة $In(A) = C(\overline{C(A)})$. فنحصل على $C(In(A)) = \overline{C(A)}$ و هذا المطلوب الاول .

2- نفرض ان العنصر b ينتمي الى $C(\overline{A})$ أي ان $b \notin \overline{A}$ وهذا يؤدي الى وجود مجموعة مفتوحة مثل B بحيث ان $b \in B$ وان $A \cap B = \phi$ وبالتالي فان $B \subseteq C(A)$ وهذا يؤدي الى ان $b \in In(C(A))$ اذن $C(\overline{A}) \subseteq In(C(A))$. ولبرهان الاتجاه الثاني يمكن استخدام نفس الطريقة المذكورة للاتجاه الاول فنحصل على المساواة المطلوبة . #

تعريف 20.3.3 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X ولتكن x نقطة ما من نقاط X. تسمى النقطة x نقطة خارجية (Exterior point) للمجموعة A اذا وفقط اذا x نقطة داخلية للمجموعة $C(A)$. او x نقطة خارجية للمجموعة A اذا وفقط اذا توجد مجموعة مفتوحة تحتوي على x جزئية من $C(A)$. تسمى مجموعة النقاط الخارجية للمجموعة A بالمجموعة الخارجية الى A ويرمز لها بالرمز $E(A)$. و بهذا يمكن القول بان المجموعة الخارجية الى A هي المجموعة الداخلية الى $C(A)$ وبالاعتماد على المبرهنة (19.3.3) نحصل على $E (A) = In (C (A)) = C (\overline{A})$.

مثال 1 : ليكن (R,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي . سنبين ما هي المجموعة الخارجية الى المجموعة A في الحالات التالية :

1) اذا كانت $A = \{x \in R : 0 < x \leq 1\}$.

2) اذا كانت A مجموعة الأعداد الصحيحة .

3) اذا كانت A مجموعة الأعداد النسبية .

الحل : 1) من تعريف النقطة الخارجية نجد ان لكل نقطة $y \in R$ بحيث $y > 1$ فان y نقطة داخلية بالنسبة الى $C(A)$، كذلك اذا كانت $y < 0$ فان y نقطة خارجية بالنسبة الى A اما النقاط في المجموعة $\{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$ فهي ليست خارجية الى A وبهذا فان

$$E (A) = \{x \in R: x < 0\} \cup \{x \in R: x > 1\}$$

2) يمكن للقارئ وبنفس الأسلوب المتبع في (1) يستنتج ان النقاط الخارجية الى مجموعة الأعداد الصحيحة هي $R - A$.

3) لتكن y نقطة ما تنتمي الى $R - A$ فان أي مجموعة (فترة) مفتوحة تحتوي على y يجب ان تمتلك اعداد نسبية وبهذا فان y ليست نقطة داخلية بالنسبة الى $R - A$ أي ان $E (A) =\phi$

مثال 2 : لتكن $X = \{1,2,3,4,5\}$ و $T = \{\phi , X, \{1\} , \{2\} , \{1,2\} , \{1,2,3\}\}$ ولتكن $A = \{2,4\}$. يلاحظ ان $E (A) = \{1\}$.

مبرهنة 21.3.3 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا ولتكن A , B مجموعتين جزئيتين من X فان :

$E(A) = E(C(E(A)))$ - 1.

$E(A \cup B) = E(A) \cap E(B)$ - 2.

البرهان : 1- بالاعتماد على التعريف (20.3.3) و الملاحظة اعلاه نحصل على

$E(C(E(A))) = E(C(C(\overline{A}))) = E(\overline{A}) = C(\overline{A}) = E(A)$.

2- لبرهان هذا الجزء نستخدم الجزء الثالث من المبرهنة (7.3.3) نجد ان

$E(A \cup B) = C(\overline{A \cup B}) = C(\overline{A} \cup \overline{B}) = C(\overline{A}) \cap C(\overline{B}) = E(A) \cap E(B)$. #

سوف ننهي هذا الجزء من هذا الفصل باعطاء نوع آخر من انواع النقاط في الفضاء التوبولوجي والتي نسميها بالنقاط المتاخمة (Boundary points). هذا النوع من النقاط يمكن تعريفها بالشكل الاتي :

لكل مجموعة جزئية A من X فان النقاط القريبة جدا (بمفهوم الفضاء المتري) من A ومن متممة A هي النقاط المتاخمة للمجموعة A وبصورة اكثر دقة :

تعريف 22.3.3 : لتكن A مجموعة جزئية في الفضاء التبولوجي (X,T) ولتكن x نقطة ما من نقاط X. تسمى x بالنقطة المتاخمة للمجموعة A اذا وفقط اذا كانت x نقطة انغلاق للمجموعتين A ومتممة A ويرمز لمجموعة النقاط هذه بالرمز Bd(A) وتسمى بالمجموعة المتاخمة الى A.

من التعريف اعلاه يمكن القول بان $\overline{A} \cap \overline{C(A)} = Bd(A)$. و بهذا فان المجموعة A ومتممتها يمتلكان نفس المجموعة المتاخمة .

مثال 1 : لتكن $X = R$ وان T التبولوجيا القوية على X فان أي مجموعة جزئية من X لا تمتلك نقاط متاخمة والسبب في ذلك يعود الى ان أي نقطة $x \in X$ فان $\{x\}$ مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن واحد وبهذا فان $\{x\}$ لا تتقاطع مع $X - \{x\}$.

مثال 2 : لتكن $X = R^2$ (حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية) ولتكن

$A = \{(x,y) \in X : x \geq 1 , -1 \leq y \leq 1\}$ فان المجموعة المتاخمة للمجموعة A هي اتحاد المجموعات الثلاث التالية:

$\{(x,y): x = 1, -1 \le y \le 1\}$, $\{(x,y): x \ge 1, y = -1\}$, $\{(x,y): x \ge 1, y = -1\}$.

مبرهنة 23.3.3 : لتكن A مجموعة جزئية في الفضاء التبولوجي (X,T) فان المجموعة المتاخمة الى A مجموعة مغلقة .

البرهان : بما ان $Bd(A) = \overline{A} \cap \overline{C(A)}$ وان لكل مجموعة B فان $\overline{B}$ مجموعة مغلقة فان Bd(B) عبارة عن تقاطع مجموعتين مغلقتين وبالتالي فانها مجموعة مغلقة . #

مبرهنة 24.3.3 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X فان المجموعة المتاخمة الى A تساوي مجموعة انغلاق A مطروحا منها المجموعة الداخلية الى A أي $Bd(A) = \overline{A} - In(A)$.

البرهان : باستخدام التعريف (20.3.3) والعلاقة $Bd(A) = \overline{A} \cap \overline{C(A)}$ نحصل على $Bd(A) = \overline{A} \cap C(In(A))$. يكفي ان نبرهن $\overline{A} \cap C(In(A)) = \overline{A} - In(A)$. لتكن $x \in \overline{A} \cap C(In(A))$ فان $x \in C(In(A))$، هذا يؤدي الى ان $x \notin In(A)$ وبالتالي فان $x \in \overline{A} - In(A)$ وبهذا فان Bd (A) مجموعة جزئية من $\overline{A} - In(A)$. الطريقة ذاتها تعطينا الاتجاه الثاني .

مبرهنة 25.3.3 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X فان :

1- A مجموعة مغلقة اذا وفقط اذا A تحتوي على المجموعة المتاخمة لها .

2- A مجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا C(A) تحتوي على المجموعة المتاخمة الى A.

البرهان : 1- نفرض ان A مجموعة مغلقة اذن $A = \overline{A}$ وبذلك فان $Bd(A) = \overline{A} - In(A) = A - In(A) \subseteq A$. وبالعكس نفرض ان $Bd(A) \subseteq A$، وهذا يعني أن $\phi \subseteq A - In(A) \subseteq A$ وبالتالي فان. $A \subseteq (\overline{A} - In(A)) \cup A \subseteq A$.

اذن $A \subseteq \overline{A} \subseteq A$ و هذا يعني ان $A = \overline{A}$ وبالتالي فان A مجموعة مغلقة .

2- نفرض ان A مجموعة مفتوحة فان C(A) مجموعة مغلقة . بالاعتماد على الجزء الاول اعلاه فان Bd(C(A)) مجموعة جزئية من C(A) لكن $Bd(A) = Bd(C(A))$. هذا يؤدي الى ان $Bd(A) \subseteq C(A)$.

بالعكس بما ان$Bd(A) \subseteq C(A)$ فان $Bd(C(A)) \subseteq C(A)$ وهذا يؤدي الى ان $C(A)$ مجموعة مغلقة أي ان A مجموعة مفتوحة . #

فيما ياتي سنذكر امثلة اخرى تتناول الانواع الثلاثة الاخيرة من النقاط في الفضاء التبولوجي وهي النقاط الداخلية والخارجية والمتاخمة .

مثال 1 : لتكن X مجموعة غير منتهية و T تبولوجيا المتممات المنتهية أي

$T = \{ A \subseteq X: X - A$ مجموعة منتهية $\} \cup \{\phi\}$.

لتكن A مجموعة جزئية في الفضاء التبولوجي (X,T). سنجد مجموعة انغلاق A، المجموعة الداخلية الى A، المجموعة الخارجية الى A والمجموعة المتاخمة الى A في حالتين :

1- عندما A مجموعة منتهية . 2- عندما A مجموعة غير منتهية .

ناخذ الحالة الاولى : بما ان A مجموعة منتهية فانها لا تحتوي على مجموعة مفتوحة غير خالية وبذلك فان المجموعة الداخلية لها هي المجموعة الخالية ومن جهة اخرى فانها مجموعة مغلقة (لانها متممة لمجموعة غير منتهية مفتوحة في X) . هذا يعني ا ن $A=\bar{A}$ وان

$E(A) = C(A)$. بما ان $C(A)$ مجموعة مفتوحة فان $\overline{C(A)} = X$ وبهذا ينتج ان

$Bd(A) = \bar{A} \cap \overline{C(A)}$. وبالتالي فان $Bd(A) = A$.

اما الحالة الثانية هي عندما تكون المجموعة A غير منتهية و لهذه الحالة احتمالان :

أ- عندما تكون المجموعة المتممة الى A مجموعة منتهية وبهذا فان A مجموعة مفتوحة وبالتالي فان $In(A) = A$. اما المجموعة الخارجية هي المجموعة الخالية و ان المجموعة المتاخمة هي :

$Bd(A) = \bar{A} \cap \overline{C(A)} = X \cap C(A) = C(A)$.

ب- عندما تكون متممة A مجموعة غير منتهية وفي هذه الحالة لا يمكن القول بان A مجموعة مفتوحة او مغلقة أي ان $In(A) = E(A) = \phi$ وان المجموعة المتاخمة الى A هي X.

مثال 2 : لتكن $X = N$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ولتكن $A_n = \{1,2,\dots, n\}$ لكل n وان. $T = \bigcup_{n \in N}\{A_n\} \cup \{\phi , X\}$. واضح ان T تبولوجي على X كما مر سابقا . لتكن

$A = \{9, 11, 12, 60\}$ مجموعة جزئية من X سنجد المجموعات المطلوبة في المثال السابق بالنسبة الى المجموعة A.

الحل : بما ان المجموعة A لا تحتوي على أي مجموعة مفتوحة . هذا يؤدي الى ان $In\,(A) = \phi$. ان اصغر مجموعة مغلقة تحتوي على A هي المجموعة $\{9,10,11, ...,n, ...\}$ وبذلك فان مجموعة الانغلاق هي $\bar{A} = \{9,10,11,12,...\}$. و بهذا فان المجموعة الخارجية الى A هي المجموعة $E\,(A) = A_8 = \{1,2, \;\; ,7,8\}$.

واضح ان المجموعة $A_1 = \{1\}$ مجموعة كثيفة في الفضاء التبولوجي (X,T) وهذا يؤدي الى ان أي مجموعة تحتوي على المجموعة A_1 تكون كثيفة وبالتالي فان $C\,(A) = \{1,2, \;\; ,8\}$ مجموعة كثيفة أي ان $X = \overline{C\,(A)}$. الآن يمكن استنتاج المجموعة المتاخمة وهي :

$Bd\,(A) = \bar{A} \cap \overline{C(A)} = \bar{A} \cap X = \bar{A} = \{9,10,11,...,n,...\}$.

4.3 : الاقترانات بين الفضاءات التوبولوجية

ان مفهوم الاقترانات المستمرة معروفا قبل ان تتبلور فكرة الفضاءات التبولوجية بمدة كبيرة. في هذا الجزء من الفصل سنعطي التعريف الاساسي للاقترانات المستمرة بين فضائيين تبولوجيين ونستنتج الصفات الاساسية التي تتمتع بها هذا النوع من الاقترانات كذلك نتطرق الى اهميتها في هذا الموضوع . ونتعرض الى انواع اخرى من الاقترانات و التي تسمى بالاقترانات المفتوحة و المغلقة (Open and Closed functions). وتبدأ بالتعريف الآتي:

تعريف 1.4.3 : ليكن كل من (X,T) , (Y,S) فضاءا تبولوجيا و f اقتران من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S). يقال ان الاقتران f مستمر عند النقطة a (حيث $a \in X$) اذا كان معكوس الصورة لكل مجموعة مفتوحة B تحتوي على النقطة $f(a)$ في Y مجموعة مفتوحة هي $f^{-1}(B)$ تحتوي على النقطة a في X. أي لكل $f\,(a) \in B \in S$ فان $a \in f^{-1}\,(B) \in T$. ويسمى الاقتران مستمر اذا كان مستمر على كل نقطة من نقاط X. ويمكن صياغة التعبير اعلاه بالشكل الاتي :

الاقتران f مستمر اذا وفقط اذا لكل مجموعة مفتوحة B في Y فان معكوس الصورة لها مجموعة مفتوحة في X. يلاحظ ان ليس بالضرورة ان $f(A)$ مفتوح ولو كان A مفتوحا .

مبرهنة 2.4.3 : ليكن f اقتران من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S). فان f اقتران مستمر اذا وفقط اذا لكل جوار M في Y فان $f^{-1}(M)$ جوار في X .

البرهان : أولا نفرض ان f اقتران مستمر وان M جوار في Y. لكل نقطة $a \in f^{-1}(M)$ فان $f(a) \in M$ وهذا يؤدي الى وجود مجموعة مفتوحة B تحتوي على النقطة $f(a)$ وان $B \subseteq M$

بما ان f اقتران مستمر فان $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة جزئية من $f^{-1}(M)$ بالتالي فان $f^{-1}(M)$ جوار في X. بالعكس نفرض a نقطة ما في X وان B مجموعة مفتوحة في Y تحتوي على النقطة $f(a)$. اذن يوجد جوار M للمجموعة B في Y . بما ان $f^{-1}(M)$ جوار في X وان $a \in f^{-1}(M)$ فان $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة في X تحتوي على النقطة a وهذا يؤدي الى ان f اقتران مستمر بالنقطة a وبالتالي فان f اقتران مستمر على X. #

مثال 1 : ليكن كل من (X, T) , (Y , S) فضاءا تبولوجيا بحيث ان :

$X = \{a,b,c,d,e\}$, $Y = \{1,2,3\}$.

$S = \{\phi , \{1\} , \{2,3\} , Y\} , T = \{ \phi , \{a\} , \{b\} , \{a,b\} , \{a,b,c,d\} , X\}$

و ليكن f اقتران معرف بالشكل التالي :

$$f (a) = f (b) = 1 , f (c) = f (d) = f (e) = 2$$

الاقتران f مستمر بالنقطتين a و b فقط . وذلك لان معكوس الصورة لاي مجموعة مفتوحة تحتوي على العنصر $f (a) = f (b) = 1$ تكون مجموعة مفتوحة هي $\{a , b\}$ في X. من ناحية ثانية لو اخذنا النقطة $f (c)$ فان $f (c) = 2$ وان المجموعة المفتوحة $\{2,3\}$ تحتوي على النقطة $f(c)$ ومعكوس الصورة لهذه المجموعة هي المجموعة $\{c , d, e\}$ ولكن المجموعة $\{c , d, e\}$ ليست مفتوحة في X ونفس الشيء يحدث للنقطتين d و e وبهذا فان f اقتران غير مستمر بالنقاط c , d , e.

مثال 2 : ليكن كل من (X,T) , (Y,S) فضاءا تبولوجيا وان T التبولوجيا القوية على X فان أي اقتران من X الى Y يكون مستمرا لان أي مجموعة مفتوحة B من Y تكون معكوس الصورة لها $f^{-1}(B)$ مجموعة جزئية من X وبما ان أي مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة في X فهذا يؤدي الى ان $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة وبالتالي فان f اقتران مستمر .

مثال 3 : ليكن كل من (X,T) , (Y, S) فضاءا تبولوجيا وان S التبولوجيا الضعيفة على Y فان أي اقتران f من X الى Y يكون مستمر . لان المجموعات المفتوحة في Y هي ϕ و Y وبذلك فان $\phi = f^{-1}(\phi)$ و $X = f^{-1}(Y)$ وبما ان ϕ, X (مجموعتان مفتوحتان في X. فان f اقتران مستمر .

مبرهنة 3.4.3 : ليكن $f:X \longrightarrow Y$ اقترانا من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S) فان f اقتران مستمر اذا وفقط اذا لكل مجموعة جزئية مغلقة F من Y فان معكوس الصورة لها $f^{-1}(F)$ مجموعة جزئية مغلقة في X.

البرهان : لتكن F مجموعة مغلقة في Y فان $C(F)$ مجموعة مفتوحة في Y. بما ان f اقتران مستمر فان $f^{-1}(C(F))$ مجموعة مفتوحة في X. أي ان $f^{-1}(Y - F)$ مجموعة مفتوحة في X وهذا يؤدي الى ان $X - f^{-1}(F)$ مجموعة مفتوحة في X وبالتالي فان $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X. بالعكس لتكن B مجموعة مفتوحة من Y فان $C(B) = Y - B$ مجموعة مغلقة في Y. من الفرض نحصل على ان $f^{-1}(Y - B)$ مجموعة مغلقة من X. أي ان $X - f^{-1}(B)$ مجموعة مغلقة من X و بالتالي فان $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة من X وهذا يعني ان f اقتران مستمر. #

مبرهنة 4.4.3 : ليكن $f : X \longrightarrow Y$ اقترانا من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S) فان f اقتران مستمر اذا و فقط اذا لكل مجموعة جزئية A من X فان $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

البرهان : نفرض ان f اقتران مستمر وان A مجموعة جزئية من X. بما ان $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ فان $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ من المبرهنة (3.4.3) نستنتج ان $f^{-1}(\overline{f(A)})$ مجموعة مغلقة من X. فان $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ وهذا يؤدي الى ان $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. وبالعكس لتكن F مجموعة مغلقة من Y فان $f^{-1}(F)$ مجموعة جزئية من X. بالاعتماد على المبرهنة (3.4.3) يكفي ان نبرهن ان $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة من X. بما ان $X \subseteq f^{-1}(X)$ فان $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f^{-1}(f^{1}(F))}$ هذا يؤدي الى $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{F} \subseteq F$ وبالتالي فان $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$. بما ان لكل مجموعة W فان $W \subseteq \overline{W}$ فهذا يعني $f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)}$. ومن هاتين النتيجتين

نحصل على $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$ هذا يؤدي الى ان $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة من X. #

مبرهنة 5.4.3 : ليكن $f: X \longrightarrow Y$ اقترانا ما. فان f اقتران مستمر اذا وفقط اذا لكل مجموعة B جزئية من Y فان $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

البرهان : اولا نفرض ان f اقتران مستمر وان B مجموعة جزئية من Y فان $\overline{B}$ مجموعة مغلقة من Y وهذا يعني ان $f^{-1}(\overline{B})$ مجموعة مغلقة من X.بما ان $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ فهذا يؤدي الى ان $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$. بالعكس لتكن F مجموعة مغلقة من Y، باستخدام الفرض نحصل على ان $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(\overline{F})$ أي ان $f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)}$ (لأن $F = \overline{F}$) وهذا يؤدي الى ان $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(f)$ والتالي فان $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة من X أي ان f اقتران مستمر . #

مبرهنة 6.4.3 : ليكن كل من (X, T) (Y, S) , (Z, Q) فضاءا تبولوجيا . وان $g: Y \longrightarrow Z$, $f: X \longrightarrow Y$ اقترانين مستمرتين فان تركيب الاقتران f مع الاقتران g $(gof: X \longrightarrow Z)$ اقتران مستمر .

البرهان : لتكن C مجموعة مفتوحة من Z فان $g^{-1}(C)$ مجموعة مفتوحة من Y (لأن g اقتران مستمر) وبما ان f اقتران مستمر فان $f^{-1}(g^{-1}(C))$ مجموعة مفتوحة من X. لكن $(gof)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ هذا يؤدي الى ان gof اقتران مستمر. #

كما لاحظنا سابقا ان تعريف الاقتران المستمر يعتمد بشكل رئيسي على المجموعات المفتوحة وبهذا يمكن برهان استمرارية الاقتران بالاعتماد على عناصر القاعدة للفضاء التبولوجي أي ان :

مبرهنة 7.4.3: ليكن f اقترانا من الفضاء التبولوجي (X, T) الى الفضاء التبولوجي(Y,S) ولتكن $B = \{B_j\}_{j\in J}$ قاعدة للتبولوجي S. فان f اقتران مستمر اذا وفقط اذا معكوس الصورة وفق f لاي عنصر من عناصر القاعدة B تكون مجموعة مفتوحة من X.

البرهان : ان الاتجاه الاول واضح باستخدام تعريف الاستمرارية . العكس نفرض ان معكوس الصورة وفق f لاي عنصر من عناصرB مجموعة مفتوحة من X. الآن لتكن D مجموعة مفتوحة من Y فان D تساوي اتحاد لعدد من عناصر القاعدة B أي ان $D = \bigcup_{j\in J} B_j$

هذا يؤدي الى ان $f^{-1}(D) = f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ بما ان $f^{-1}(B_j)$ مجموعة مفتوحة

من X (لكل $j\in J$) فان $\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ مجموعة مفتوحة من X. هذا يعني ان f اقتران

مستمر . #

فيما سبق استعرضنا استمرارية الاقتران بين الفضاءات التبولوجية مستخدمين معكوس الصورة للاقتران لاي مجموعة مفتوحة او مغلقة ولكن هل للصور المباشرة للمجموعات المفتوحة او المغلقة من ان تحقق استمرارية الاقتران ؟ فيما يلي نبين عدم تحقيق الاستمرارية في مفهوم الصور المباشرة وكذلك ندرس هذه الانواع من الاقترانات وصفاتها .

تعريف 8.4.3 : لتكن f اقتران من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S) . يسمى الاقتران f اقتران مفتوح اذا وفقط اذا لكل مجموعة مفتوحة A من X فان f (A) مجموعة مفتوحة من Y . ويسمى f اقتران مغلق اذا وفقط اذا لكل مجموعة مغلقة F من X فان f(F) مجموعة مغلقة من Y.

في المثاليين التاليين سنبين ان الاقتران المفتوح او المغلق لا يحقق شروط الاستمرارية .

مثال 1 : لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية وان T التبولوجيا الحقيقية على R ولتكن $Y = \{a,b\}$ حيث $a \neq b$ وان $S = \{\phi , \{a\} , \{b\} , Y\}$. نفرض ان $f: R \longrightarrow Y$ اقتران معرف بالشكل الاتي :

لكل $x \geq 0$ فان $f (x) = a$ ولكل $x < 0$ فان $f (x) = b$. واضح ان لكل مجموعة مفتوحة A من R فان f(A) مجموعة مفتوحة من Y. لكن {a} مجموعة مفتوحة من Y و $f^{-1}(\{a\})$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة $[0 , \infty)$ والتي هي ليست مجموعة مفتوحة من R. بهذا فان f اقتران ليس مستمر .

مثال2 : ليكن f اقتران من الفضاء التبولوجي الحقيقي الى نفسه معرف بالصيغة الاتية : لكل $x \in R$ فان $f (x) = 1 /(1 + x^2)$.

ان هذا القتران ليس مفتوح وليس مغلق وذلك لان $f (R) = (0, 1]$ وهذه الفترة $(0,1]$

نصف مفتوحة وهي ليست مفتوحة وليست مغلقة في الفضاء التبولوجي الحقيقي ولكن الاقتران f مستمر .

مبرهنة 9.4.3 : ليكن f اقتران من الفضاء التبولوجي (X,T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S) و A قاعدة للتبولوجي T فان f اقتران مفتوح اذا وفقط اذا لكل عنصر A_i من عناصر A فان $f(A_i)$ مجموعة مفتوحة من Y.

البرهان : الاتجاه الاول واضح . بالعكس نفرض ان W مجموعة مفتوحة من X فان W تساوي اتحاد لعدد من عناصر القاعدة A. أي ان $W = \bigcup_{j\in J} A_j$. وبهذا فان

$$\bigcup_{j\in J} f(A_j) = f\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) = f(W)$$

بما ان $f(A_j)$ مجموعة مفتوحة من Y (لكل $j \in J$) فان f(W) مجموعة مفتوحة من Y وبالتالي فان f اقتران مفتوح . #

مبرهنة 3 . 4 . 10 : ليكن f اقتران من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S) فان العبارات الاتية متكافئة :

1 - f اقتران مفتوح .

2- لكل مجموعة جزئية B من Y فان $f^{-1}(\bar{B}) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$.

3- لكل مجموعة جزئية A من X فان $f(\mathrm{In}(A)) \subseteq \mathrm{In}(f(A))$.

البرهان : (1 الى 2) لتكن B مجموعة جزئية من Y وليكن x عنصر لا ينتمي الى $\overline{f^{-1}(B)}$ فان x ينتمي الى $X - \overline{f^{-1}(B)}$ هذا يعني ان $f(x) \in f(X - \overline{f^{-1}(B)})$. بما ان $f(X - \overline{f^{-1}(B)})$ مجموعة جزئية من Y−B وان $\mathrm{In}(Y\ B)$ $f(X - \overline{f^{-1}(B)})$ (لان f اقتران مفتوح) . اعتمادا على الجزء الثاني من المبرهنة (19.3.3) نحصل على $f(X - \overline{f^{-1}(B)}) \subseteq Y - \bar{B}$.

هذا يؤدي الى ان $f(x) \in Y\ \bar{B}$ أي ان $f(x) \notin \bar{B}$ وبالتالي فان $x \notin f^{-1}(\bar{B})$. اذن $f^{-1}(\bar{B}) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$.

(2 الى 3) لتكن A مجموعة جزئية من X ولتكن b نقطة ما تنتمي الى $f(\mathrm{In}(A))$. اذن

يوجد عنصر مثل a بحيث ان $f(a) = b$ و $a \in In(A)$. الآن نعتمد على الجزء الاول من المبرهنة (19.3.3) ينتج ان $a \notin \overline{X - A}$ واستنادا الى الفرض فان

$\overline{f^{-1}(Y - f(A))} \subseteq f^{-1}(\overline{Y - f(A)}) = X - \overline{f^{-1}(f(A))} \subseteq \overline{X - A}$. نستخدم الجزء الثاني من المبرهنة (19.3.3) نحصل على

$f^{-1}(\overline{Y - In(A)}) = f^{-1}(Y - In(f(A))) = X - f^{-1}(f(A)) \subseteq X - A$. وهذا يعني ان

$a \in f^{-1}(In(f(A))$ (أي ان $b = f(a) \in In(f(A))$.

(3 الى1) لتكن A مجموعة جزئية مفتوحة من X فان $In(A) = A$ ومن (3) اعلاه ينتج ان $f(A) = f(In(A)) = In(f(A))$. بالتالي فان $f(A)$ مجموعة مفتوحة في Y. #

نتيجة 11.4.3 : ليكن f اقترانا من الفضاء التبولوجي (X,T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S) فان f اقتران مستمر ومفتوح اذا وفقط اذا كان لكل مجموعة جزئية B من Y، $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.

البرهان : يمكن استنتاج البرهان بتطبيق المبرهنتين .(4.4.3) , (10.4.3). #

يمكن استعراض مبرهنات مماثلة للمبرهنات التي درست على الاقتران المفتوح باستخدام الاقتران المغلق .

مبرهنة 12.4.3 : ليكن f اقترانا من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S) فان f اقتران مغلق اذا وفقط اذا كان لكل مجموعة جزئية A من X، $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

البرهان : اولا لتكن A مجموعة جزئية من X فان $\overline{A}$ مجموعة مغلقة وبالتالي فان $f(\overline{A})$ مجموعة مغلقة (لأن f اقتران مغلق) وهذا يؤدي الى ان $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$. بالعكس نفرض ان F مجموعة مغلقة من X فان $F = \overline{F}$. باستخدام الفرض نحصل على ان $f(F) = f(\overline{F}) \supseteq \overline{f(F)}$.

أي ان $f(F) = \overline{f(F)}$ و بالتالي فان f اقتران مغلق . #

مبرهنة 13.4.3 : لتكن f اقتران من الفضاء التبولوجي (X, T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S) فان f اقتران مستمر ومغلق اذا وفقط اذا كان لكل مجموعة جزئية A من X ، $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

البرهان : واضح باستخدام المبرهنتين (4.4.3) , (12.4.3) . #

مبرهنة 14.4.3 : ليكن f اقترانا من الفضاء التبولوجي (X,T) الى الفضاء التبولوجي

(Y,S) و g اقتران من الفضاء التبولوجي (Y, S) الى الفضاء التبولوجي(Z , Q) فان التركيب gof اقتران مفتوح (مغلق) اذا كان كل من f و g اقترانا مفتوحا (مغلقا) .

البرهان : ليكن كل من f و g اقتران مفتوح ولتكن A مجموعة جزئية من X . باستخدام المبرهنة (10.4.3) و f اقتران مفتوح نحصل على ان $f(In(A)) \subseteq (In(f(A))$. الآن ننظر الى المجموعة $f(A)$ الجزئية من Y . بما ان g اقتران مفتوح باستخدام المبرهنة (10.4.3) ينتج ان $g (In(f(A))) \subseteq In (g(f(A)))$ هذا يؤدي الى

$$(gof) (In (A)) = g (f(In (A)) \subseteq g (In(f (A))) \subseteq In (g(f(A))) = In ((gof) (A)) .$$

ومن العلاقة اعلاه وباستخدام المبرهنة (10.4.3) مرة اخرى نحصل على ان gof اقتران مفتوح . يمكن اتباع الطريقة نفسها لبرهان الحالة الاخرى عندما تكون كل منf و g اقترانا مغلقا . #

مبرهنة 15.4.3 : ليكن f اقترانا من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S) و g اقترانا من الفضاء التبولوجي (Y , S) الى الفضاء التبولوجي (Z , Q) فانه :

1- اذا كان gof اقترانا مفتوحا (مغلقا) والاقتران f مستمرا وشاملا فان الاقتران g يكون مفتوحا (مغلقا) .

2- اذا كان gof اقترانا مفتوحا (مغلقا) والاقتران g مستمرا ومتباينا فان الاقترانf مفتوح (مغلق) .

البرهان : 1- لتكن B مجموعة جزئية مفتوحة من Y . فان $B = f (f^{-1}(B))$ (لأن f اقتران شامل) هذا يعني ان $g (B) = g (f(f^{-1}(B)) = (gof) f^{-1}(B))$. بما ان f اقتران مستمر فان $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة من X. هذا يؤدي الى ان $(gof)(f^{-1}(B))$ مجموعة مفتوحة منZ (لأن gof اقتران مفتوح) . بالتالي فان g اقتران مفتوح . نفس الطريقة يمكن اتباعها للبرهنة على ان g مغلق في الحالة الثانية .

2- لتكن A مجموعة جزئية مفتوحة من X. بما ان g اقتران متباين فان $B = g^{-1} (g(B))$ لكل مجموعة جزئية B من Y . ومن هذا نحصل على

$f (A) = g^{-1} (g(f(A))) = g^{-1} ((gof) (A))$. الأن نستفاد من ان الاقتران gof اقتران

مفتوح و g اقتران مستمر فهذا يعني ان $g^{-1}((gof)(A))$ مجموعة مفتوحة من Y وبالتالي فان f اقتران مفتوح . كذلك يمكن استخدام الطريقة ذاتها لبرهان f اقتران مغلق . #

تعريف 16.4.3 : ليكن f اقترانا مستمرا من الفضاء التبولوجي (X, T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S). يسمى الاقتران f اقتران تكافؤ تبولوجي (Homeomorphism) اذا كان f اقترانا تقابليا ومعكوسها f^{-1} اقترانا مستمرا .

مبرهنة 17.4.3 : ليكن f اقترانا تقابلي من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S) فان العبارات الأتية متكافئة :

1- f اقتران تكافؤ تبولوجي .

2- f اقتران مستمر ومفتوح .

3- f اقتران مغلق ومستمر .

البرهان : (1 الى 2) واضح ان f اقتران مستمر . فقط نبرهن ان f اقتران مفتوح . لتكن A مجموعة مفتوحة جزئية من X فان $(f^{-1})^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة جزئية من Y (لأن f^{-1} اقتران مستمر) . هذا يعني ان $f(A)$ مجموعة مفتوحة .

(2 الى 3) واضح من تعريف الاقتران المفتوح والاقتران المغلق .

(3 الى 1) يكفي ان نبرهن على ان f^{-1} اقتران مستمر . لتكن A مجموعة مفتوحة جزئية من X فان $C(A)$ مجموعة مغلقة جزئية من X وهذا يؤدي الى ان $f(C(A))$ مجموعة مغلقة في Y . بما ان $f(C(A)) = C(f(A))$ فان $f(A)$ مجموعة مفتوحة من Y أي ان f^{-1} اقتران مستمر . #

احيانا قد يكون الاقتران تقابليا ومستمرا ولكنه ليس اقتران تكافؤ تبولوجي ، ذلك لأن معكوس الاقتران يكون غير مستمر هذا ما سنبينه في المثال التالي :

مثال 1 : لتكن $X = \{a,b,c\}$ وان $T = P(X)$, $S = \{\phi, X\}$، ولتكن $I: (X,T) \longrightarrow (X,S)$ الاقتران الذاتي $(I(x) = x)$. واضح ان I اقتران تقابلي ومستمر، لكن معكوس الاقتران ليس اقترانا مستمرا . فمثلا العنصر $\{a\}$ موجود في التبولوجي T بينما معكوس الصورة غير موجود في التبولوجي S.

مثال 2 : ليكن f اقترانا من الفضاء التبولوجي الحقيقي (R,T) الى نفسه معرفة بالشكل الأتي : لكل $x\in R$ فان $f(x) = ax + b$ حيث a,b اعداد حقيقية موجبة و$a \neq 0$. فان الاقتران f اقتران تكافؤ تبولوجي .

الحل : واضح ان الاقترانf تقابلي. لكي نبرهن ان f اقتران مستمر . نفرض اولا ان $a > 0$ و (c , d) فترة مفتوحة من R فان $f^{-1}((c,d)) = ((c - b) / a , (d - b) / a)$ فترة مفتوحة منR وبالتالي فان f اقتران مستمر . يمكن اتباع الطريقة نفسها للبرهنة على ان f^{-1} اقتران مستمر اما في حالة $a < 0$ فنترك للقارئ .

مبرهنة 18.4.3 : ليكن f اقترانا تقابلي من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S) فان العبارات الأتية متكافئة :

1- f اقتران تكافؤ تبولوجي .

2- تكون أي مجموعة A جزئية من X مفتوحة (مغلقة) اذا وفقط اذا كانت $f(A)$ مجموعة مفتوحة (مغلقة) من Y.

3- الأسرة $\{A_i\}_{i\in I}$ تكون قاعدة للتبولوجي T اذا وفقط اذا الأسرة $\{f(A_i)\}_{i\in I}$ قاعدة للتبولوجي S.

البرهان : (1 الى 2) واضح بسبب ان f اقتران تكافئ تبولوجي .

(2 الى 3) لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ قاعدة للتبولوجي T واضح ان $\{f(A_i)\}_{i\in I}$ اسرة مجموعات مفتوحة من Y . الآن يجب ان نبرهن ان اسرة المجموعات $\{f(A_i)\}_{i\in I}$ تشكل قاعدة للتبولوجي S. نفرض ان W عنصر ما من عناصر S، اذن توجد مجموعة مفتوحةV من X بحيث ان $W = f(V)$ (لأن f اقتران تقابلي وبالاستفادة من الفرض) . هذا يؤدي الى وجود عدد من عناصر الأسرة $\{A_i\}_{i\in I}$ بحيث ان $V= \bigcup_{j\in J} A_j$ وبالتالي فان

$W = f(V) = f(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} f(A_j)$. من هذا نستنتج ان $\{f(A_i)\}_{i\in I}$ قاعدة للتبولوجي S.

(3 الى 1) واضح ان الاقتران f مفتوح بالاعتماد على المبرهنة (17.4.3). يكفي ان نبرهن f اقتران مستمر . لتكن B مجموعة مفتوحة منY فان $B = \bigcup_{j\in J} f(A_j)$ وبهذا فان

$\bigcup_{j\in J} A_j$ ان واضح $\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} (f^{-1}(f(A_j))) = f^{-1} (\bigcup_{j\in J} f(A_j)) = f^{-1} (B)$

مجموعة مفتوحة من X. اذن f اقتران مستمر . #

الآن يمكن صياغة مبرهنتين بالأستناد الى المبرهنتين (13.4.3) , (17.4.3) والنتيجة (11.4.3) وبرهانهما ينتج مباشرة وهما كالأتي :

مبرهنة : 19.4.3 ليكن f اقترانا تقابليا من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S) فان f اقتران تكافؤ تبولوجي اذا وفقط اذا كان لكل مجموعة جزئية A من X فان $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

مبرهنة 20.4.3 : ليكن f اقترانا تقابليا من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S) فان f اقتران تكافؤ تبولوجي اذا وفقط اذا لكل مجموعة جزئية B من Y فان $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B})$.

مبرهنة 21.4.3 : ليكن f اقتران تكافؤ تبولوجبي حيث ان f اقتران من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S) و g اقتران تكافؤ تبولوجي من الفضاء التبولوجي (Y , S) الى الفضاء التبولوجي (Z , Q) فان gof اقتران تكافؤ تبولوجي من الفضاء التبولوجي (X,T) الى الفضاء التبولوجي (Z , Q) .

البرهان : ينتج مباشرة باستخدام المبرهنتين (6.4.3) , (14.4.3). #

تعريف 22.4.3 : يقال ان الفضاء التبولوجي (X , T) متكافىء تبولوجيا (Homeomorphic) مع الفضاء التبولوجي (Y , S) اذا وفقط اذا يوجد اقتران تكافؤ تبولوجي بينهما .

من التعريف اعلاه يمكن تكوين علاقة تكافؤ على الفضاءات التبولوجية و بهذا نحصل على صفوف تكافؤ حيث ان كل صف تكافؤي يضم جميع الفضاءات التبولوجية المتكافئة تبولوجيا. بما ان الفضائيين التبولوجيين المتكافئان يحملان نفس الخواص التبولوجية . فان دراسة فضاء تبولوجي واحد تكفي لمعرفة الخواص التبولوجية للفضاءات التبولوجية الاخرى المتكافئة معها . هذا يمكننا من تصنيف الفضاءات التبولوجية ووضعها على شكل صفوف تكافؤ .

هنالك صفات تتميز بها الفضاءات التبولوجية وأي فضاء يتمتع بواحدة من هذه الصفات فان الفضاءات المكافئة تبولوجيا له تتمتع بهذه الصفة ايضا ويطلق على هذه الصفة بصفة تبولوجية (Topological property).

اذا كانت p صفة تبولوجية على الفضاء التبولوجي (X , T) و (X , T) متكافىء تبولوجيا مع الفضاء التبولوجي (Y , S) فان الاخير يتمتع بالصفة p ايضا، سوف نستخدم هذا التعريف بكثافة في الفصل القادم .

5.3 الفضاءات التبولوجية الجزئية

في عام 1911 قام العالم هاوسدورف بوضع اللبنة الاولى على مفهوم بناء تبولوجي على اية مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي معين . لبناء التبولوجي الجديد على المجموعة الجزئية من المتوقع ان نستعمل التبولوجي الأصلي المعرف على المجموعة الكلية ويمكن صياغة هذه الطريقة بدقة على الشكل الأتي :

تعريف 1.5.3: ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا وانY مجموعة جزئية غير خالية منX فان اسرة المجموعات الجزئية من Y التي تنتج من تقاطع المجموعات المفتوحة من X مع المجموعة Y والتي نرمز لها بالرمز T_Y: اي $T_Y = \{B = A \cap Y : X$ مجموعة مفتوحة في $A\}$.

سنعطي تسمية معينة لأسرة هذه المجموعات بعد المبرهنة التالية :

مبرهنة 2.5.3 : لتكن Y مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء التبولوجي(X , T) فان الأسرة T_Y المعرفة اعلاه تشكل تبولوجي على Y.

البرهان : واضح ان الشرط الأول من شروط التبولوجي متحقق أي ان Y, ϕ (عناصر من T_Y (لأن $\phi = \phi \cap Y$ و$Y = X \cap Y$) اما بالنسبة للشرط الثاني نفرض ان B_1, B_2 عنصريين من عناصر T_Y. فان $B_1 = A_1 \cap Y$, $B_2 = A_2 \cap Y$ حيث A_2، A_1 عناصر في T. هذا يؤدي الى ان $B_1 \cap B_2 = (A_1 \cap Y) (A_2 \cap Y)$. بما ان $A_1 \cap A_2$ مجموعة مفتوحة في X أي ان $A_1 \cap A_2$ عنصر في T فان$(A_1 \cap A_2) \cap Y$ عنصر في T_Y وبهذا فان $B_1 \cap B_2 \in T_Y$. اخيرا نحقق الشرط الثالث . لتكن $\{B_i\}_{i\in I}$ اسرة من عناصر T_Y . هذا يعني وجود عنصر A_i في T لكل عنصر B_i بحيث ان $B_i = A_i \cap Y$. الآن ننظر الى اتحاد عناصر الأسرة $\{B_i\}_{i\in I}$.

$$\bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap Y) = \bigcup_{i\in I} A_i \cap Y$$

بما ان المجموعة $\bigcup_{i\in I} A_i$ عنصر من عناصر T فان $\bigcup_{i\in I} B_i$ عنصر ينتمي الى T_Y وبالتالي

فان T_Y تبولوجي على Y. #

نسمي التبولوجي T_Y بالتبولوجيا المنتجة من T على المجموعة Y ونسمي (Y, T_Y) بالفضاء التبولوجي الجزئي من (X , T) . كذلك نسمي جوارات المجموعة Y للتبولوجيا المنتجة بالجوارات المنتجة . المبرهنة ادناه توضح ان الجوارات المنتجة فيY عبارة عن مقصور لجوارات في X .

مبرهنة 3.5.3 : ليكن (Y, T_Y) فضاءا تبولوجيا جزئيا من الفضاء التبولوجي (X , T) وليكن a عنصرا ما ينتمي الى Y فان المجموعة الجزئيةM من Y تكون جوار منتجا الى a اذا وفقط اذا كان يوجد جوار N الى a في X بحيث ان $M = N \cap Y$..

البرهان : ليكن M جوارا منتجا للعنصر a في Y . توجد مجموعة مفتوحة B تحتوي على a وهذا يعني انه توجد مجموعة مفتوحة A في X بحيث ان $B = A\cap Y$ اذن $M \cup A$ جوار للعنصر a في X . هذا يؤدي الى :

$$M = M\cup B = M \cup (A \cap Y) = (M\cup A) \cap Y = N \cap Y.$$

وبالعكس نفرض ان$M = N\cap Y$ حيث N جوار للعنصر a في X . اذن توجد مجموعة مفتوحة A من X تحتوي على العنصر a. واضح ان $B = A \cap Y$ حيث B مجموعة مفتوحة من Y تحتوي على a وهذا يؤدي الى ان B مجموعة مفتوحة جزئية منM وبالتالي فانM جوار منتج على a. #

مبرهنة 4.5.3 : ليكن (Y , T_Y) فضاءا تبولوجيا جزئيا من الفضاء التبولوجي (X , T) و $\{A_i\}_{i\in I}$ قاعدة للفضاء التبولوجي (X , T) فان $\{A_i \cap Y\}_{i\in I}$ قاعدة للفضاء التبولوجي الجزئي .

البرهان : واضح ان $\{A_i \cap Y\}_{i\in I}$ مجموعات مفتوحة وجزئية من Y. لتكن B مجموعة مفتوحة منY . فانB يمكن كتابتها على شكل تقاطع مجموعة مفتوحةA جزئية من X مع

المجموعة Y أي ان$B = A \cap Y$. بما ان $\{A_i\}_{i\in I}$ قاعدة للتبولوجيT. اذن $A = \bigcup_{j\in J} A_j$ حيث ان

$A_j \in \{A_i\}_{i\in I}$ (لكل $j\in J$) . هذا يؤدي الى ان

$$\bigcup_{j\in J} (A_j \cap Y) = (\bigcup_{j\in J} A_j) \cap Y = B$$

مثال 1 : لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية وان T التبولوجيا الاعتيادية (الحقيقية) على R. لتكن [c,d] فترة مغلقة من R. يمكن بناء تبولوجي منتج على الفترة المغلقة [c,d] وذلك؛ ان الجوار المنتج للنقطة c هو فترة نصف مفتوحة [c,a) جزئية من الفترة [c , d] ونفس الشيء بالنسبة للنقطة d اما اذا كانت النقطة b تقع بين c و d فان الجوار المنتج على b هو مجموعة جزئية من [c,d] بحيث انه جوار الى b في R .

مثال 2 : لتكن A مجموعة جزئية من R^n بحيث ان$A = \{(x_1, x_2,..., x_n) : x_n = 0\}$. وليكن T التبولوجيا الاعتيادية على R^n فان (A , T_A) فضاء تبولوجي جزئي من (R^n , T).

الأن يمكن البرهنة على ان الفضاء التبولوجي (A , T_A) يكافيء تبولوجيا الفضاء التبولوجي (R^{n-1} , S) حيث S التبولوجيا الاعتيادية على R^{n-1}.

الحل : نعرف الاقتران $f: R^{n-1} \longrightarrow A$ بالصيغة الأتية :

$f(x_1,x_2, \ldots ,x_{n-1}) = (x_1,x_2, \ldots ,x_{n-1}, 0)$.

واضح ان الاقتران f تقابلي . نعرف الاقتران $g : A \longrightarrow R^{n-1}$ بالشكل الاتي :

$g(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ يمكن البرهنة بسهولة على ان الاقتران gمعكوس fوكلاهما مستمران . بهذا فان (A , T_A) متكافيء تبولوجيا مع (R^{n-1} , S).

مثال 3 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا بحيث ان $T = P(X)$ ولتكن Y مجموعة جزئية غير خالية من X فان $P(Y) = T_Y$. والسبب في ذلك لأن لكل عنصر a ينتمي الى Y فان{a} عنصر في T وبهذا فان$\{a\} = \{a\} \cap Y$. هذا يؤدي الى ان {a} عنصر في T_Y ونفس الشيء يتحقق لجميع عناصر Y وبهذا تكون التبولوجيا T_Y التبولوجيا القوية على T.

مثال 4 : ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي وان Z مجموعة الأعداد الصحيحة فان T_Z تمثل التبولوجيا القوية على Z. ولبيان سبب ذلك نفرض ان n عنصر ينتمي الى Z اذن

توجد فترة مفتوحة $(n-1 , n+1)$ في R بحيث ان $(n-1 , n+1) \cap Z = \{n\}$ وهذا يعني ان $\{n\}$عنصر في T_Z وهذا يؤدي الى ان T_Z التبولوجيا القوية على Z.

مثال 5 : ليكن (X , T) فضاء المتممات المنتهية أي ان :

$T = \{A \quad X: C(A) = X - A \text{ مجموعة منتهية}\} \cup \{\phi\}$. ولتكن Y مجموعة جزئية منتهية من X فان T_Y تمثل التبولوجيا القوية علىY . يمكن مناقشة حل هذا المثال كما في المثال الرابع اعلاه و يترك كتمرين بسيط .

ملاحظة : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا وY, Z مجموعتين جزئيتين من X بحيث ان Z مجموعة جزئية من Y فيمكن بناء تبولوجيتان على المجموعة Z. الأولى ناتجة من التبولوجيا T والثانية ناتجة من التبولوجيا T_Y . تبين المبرهنة ادناه ان هاتين النوعين من التبولوجيات متساوية .

مبرهنة 5.5.3: لتكن Y, Z مجموعتين جزئيتين من الفضاء التبولوجي(X , T) بحيث ان $Z \subseteq Y$ فان $(T_Y)_z = T_z$.

البرهان : نفرض انD عنصر ما من عناصر T_Z . هذا يؤدي الى وجود عنصرA في T بحيث ان $D = Z \cap A$. بما ان $Z \subseteq Y$ فان $Z \cap (A \cap Y) = Z \cap A = D$. لكن $A \cap Y$ عنصر في T_Y ، هذا يؤدي الى ان $D \in (T_Y)_Z$. نفرض الآنD عنصر من عناصر $(T_Y)_Z$ ، يعني هذا وجود مجموعة مفتوحة مثل B جزئية منY بحيث ان $D = Z \cap B$. بالتالي توجد مجموعة مفتوحةA جزئية من X بحيث ان $B = Y \cap A$. من هاتين العلاقتين نحصل على

$$D = Z \cap B = Z \cap (Y \cap A) = Z \cap A.$$

هذا يؤدي الى ان D عنصر من عناصر T_Z. #

من التعريف (1.5.3) يمكن القول ان B مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي الجزئي (Y , T_Y) اذا وفقط اذا وجدنا مجموعة مفتوحة A في الفضاء التبولوجي (X , T) بحيث ان $B = A \cap Y$. ان هذه الملاحظة تكون صحيحة ايضا على المجموعات المغلقة كما في المبرهنة الآتية :

مبرهنة 6.5.3 : ليكن(Y , T_Y) فضاءا تبولوجيا جزئيا من الفضاء التبولوجي(X , T) فان E مجموعة مغلقة من Y اذا وفقط اذا وجدت مجموعة مغلقة F جزئية من X وان $E = F \cap Y$.

البرهان : اولا نفرض ان E مجموعة مغلقة جزئية من Y فان متممة E في Y ولتكن $C(E)$ مجموعة مفتوحة جزئية منY وهذا يعني وجود مجموعة مفتوحة A جزئية من X بحيث ان $C(E) = A \cap Y$. من هذه العلاقة بسهولة نستنتج ان $E = C(A) \cap Y$. وهذا يعني وجود مجموعة مغلقة $F = C(A)$ تحقق العلاقة المطلوبة . بالعكس نفرض ان F مجموعة مغلقة من X بحيث ان $Y \cap F = E$. واضح ان $Y \cap C(F) = C(E)$. هذا يؤدي الى ان $C(E)$ مجموعة مفتوحة جزئية منY أي ان E مجموعة مغلقة فيY . #

مثال 1 : لتكن $X = \{a,b,c,d,e\}$ و $T = \{\phi, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d,e\}\}$. ولتكن $Y = \{a,b\}$ واضح ان $T_Y = \{\phi, \{a\}, \{b\}, Y\}$وان $\{b\}$ مجموعة مفتوحة ومغلقة في Y لكنها ليست كذلك في X. بينما المجموعة $\{a\}$ مغلقة ومفتوحة فيY وكذلك في X.

مثال 2 : ليكن (R, T) الفضاء التبولوجي الحقيقي و $Y = [a,b] \cup (c,d)$حيث a,b,c,d اعداد حقيقية تحقق $a < b < c < d$. ان المجموعة الجزئية $[a,b]$ من Y مجموعة مفتوحة ومغلقة في Y والسبب في ذلك لأن المجموعة $A = (a - r, b + r)$ مفتوحة فيR (حيث $0 < r < c - b$) وان تقاطع A مع Y تمثل المجموعة $[a, b]$. كذلك المجموعة$[a,b]$ مجموعة مغلقة في R وان $[a,b] \cap Y = [a,b]$. هذا يعني ان $[a, b]$ مغلقة فيY. بما ان(c,d)متممة الى $[a,b]$ في Y فان (c,d) مجموعة مفتوحة ومغلقة فيY.

نتيجة 7.5.3 : ليكن (Y, T_Y) فضاءا تبولوجيا جزئيا من الفضاء التبولوجي (X,T) و Y مجموعة مغلقة في X فان أي مجموعة جزئية A من Y تكون مغلقة فيY اذا وفقط اذا كانت مغلقة في X.

البرهان : لتكن A مجموعة جزئية من Y . نفرض اولا ان A مجموعة مغلقة في Y . هذا يعني وجود مجموعة مغلقة F في X بحيث ان$A = F \cap Y$. بما ان Y, F مجموعتان مغلقتان في X فان تقاطعهما مجموعة مغلقة في X. هذا يؤدي الى ان A مجموعة مغلقة في X. بالعكس اذا كانت A مجموعة مغلقة في X فان $A = A \cap Y$ مجموعة مغلقة فيY (باستخدام المبرهنة (6.5.3)) . #

نتيجة 8.5.3 : لتكن Y مجموعة مفتوحة جزئية من الفضاء التبولوجي (X, T) فان المجموعة A الجزئية من Y تكون مفتوحة اذا وفقط اذا A مجموعة مفتوحة جزئية من X.

البرهان : نفس طريقة برهان النتيجة (7.5.3) و يترك الى القارىء . #

درسنا في الجزء الثاث من هذا الفصل انواع النقاط في الفضاء التبولوجي (انغلاق – تراكم – داخلية – خارجية ومتاخمة) والسؤال ما شكل مثل هذه النقاط في الفضاء التبولوجي الجزئي . أي ان اذا كان(Y , T_Y) فضاءا تبولوجيا جزئيا من الفضاء التبولوجي (X , T) و D مجموعة جزئية من Y. فما نوع مثل هذه النقاط في الفضاء الجزئي والكلي و هل توجد علاقة بين مجموعاتهما ؟

سنوضح ادناه العلاقة بين هذه المجموعات من النقاط ولنرمز اولا بالرمز $\bar{D}_Y$ لنقاط انغلاق D فيY (أي مجموعة انغلاق D فيY) ، $\acute{D}_Y$ نقاط تراكم D في Y (المجموعة المشتقة الى D في Y) ، $In\ (D_Y)$ النقاط الداخلية الى D في Y (المجموعة الداخلية الى D فيY) اما بالنسبة الى الفضاء التبولوجي الكلي بالرموز $\bar{D}_X$, $\acute{D}_X$, $In\ (D_X)$ (مجموعة انغلاق D في X، مجموعة المشتقة الى D في X ، المجموعة الداخلية الى D في X على التوالي) . ان العلاقة بين هذه المجموعات تتلخص بالمبرهنة التالية :

مبرهنة 9.5.3: ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و (Y, T_Y) فضاءا جزئيا منه ولتكن D مجموعة جزئية من Y فان :

1- $\bar{D}_X \cap Y = \bar{D}_Y$.

2- $\acute{D}_X \cap Y = \acute{D}_Y$.

3- $In\ (D_X) \cap Y \subseteq In\ (D_Y)$.

البرهان : 1 – لتكن a نقطة ما تنتمي الى $\bar{D}_Y$ ولتكن A مجموعة مفتوحة في X تحتوي على النقطة a فان $A \cap Y = B$ مجموعة مفتوحة جزئية منY تحتوي على العنصر a وهذا يعني ان $B \cap D \neq \phi$ أي ان $(A \cap Y)\ D \neq \phi$ وبالتالي فان $A \cap D \neq \phi$. هذا يؤدي الى ان a تنتمي الى$\bar{D}_X \cap Y$. بالعكس لتكن b نقطة ما تنتمي الى $\bar{D}_X \cap Y$ وان B مجموعة مفتوحة جزئية من Y تحتوي على العنصر b . اذن توجد مجموعة A مفتوحة جزئية من X تحتوي على النقطة b وان $A \cap Y = B$ وبما ان b نقطة انغلاق الى D في X فان $A \cap D \neq \phi$ وهذا يعني ان $D \cap B = D \cap (A \cap Y) = A \cap (Y \cap D) = A \cap D \neq \phi$. وهذا يدل على ان b نقطة انغلاق الى D في Y و بهذا يتحقق المطلوب الاول .

2- لتكن a نقطة ما تنتمي الى$\bar{D}_Y$ و لتكن A مجموعة مفتوحة جزئية من X تحتوي على النقطة a. فان $A \cap Y$ مجموعة مفتوحة من Y تحتوي على النقطة a. بما ان a نقطة تراكم الى D في Y فان $(D-\{a\}) \cap (A \cap Y) \neq \phi$ أي ان $A\cap (D-\{a\}) \neq \phi$ (لان D مجموعة جزئية من Y) هذا يؤدي الى ان a نقطة تراكم الى D في X. بالعكس نفرض ان b نقطة ما تنتمي الى $\bar{D}_X \cap Y$ ولتكن B مجموعة مفتوحة جزئية من Y تحتوي على b . فانه توجد مجموعة مفتوحة A جزئية من X تحتوي على b وان $A\cap Y= B$. بما ان b نقطة تراكم الى D في X فان $A (D - \{b\}) \neq \phi$ هذا يؤدي الى

$B\cap (D \{b\}) = (A\cap Y) (D - \{b\}) = A\cap (D -\{b\}) \neq \phi$ فان b نقطة تراكم الى D في Y .

3- بما ان $In (D_X)$ مجموعة مفتوحة في X فان $In(D_X) \cap Y$ مجموعة مفتوحة في Y. واضح ان $In (D_X) \cap Y \subseteq D$. هذا يؤدي الى ان $In (D_X) \cap Y$ مجموعة جزئية من $In (D_Y)$. وبهذا ينتهي البرهان . #

الأن نبين بمثال بأن المساواة غير صحيحة في المطلوب الثالث من المبرهنة اعلاه :

مثال : ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي و Y مجموعة الأعداد الصحيحة فان T_Y هي التبولوجيا القوية على Y . لتكن $D = \{1,2,3,4\}$ فان $In (D_Y) = D$ بينما $In (D_X) = \phi$ هذا يعني ان المساواة في المطلوب الثالث غير صحيح .

نتيجة 10.5.3: لتكن D مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي الجزئي (Y, T_Y). فان D مجموعة كثيفة في (Y , T_Y) اذا وفقط اذا كانت Y مجموعة جزئية من $\bar{D}_X$.

البرهان : اولا نفرض ان D مجموعة كثيفة فان $\bar{D}_Y = Y$ وهذا يعني $\bar{D}_X \cap Y = Y$ (باستخدام المبرهنة (9.5.3)) . هذا يؤدي الى ان $Y\subseteq \bar{D}_X$. بالعكس نفرض ان $Y\subseteq \bar{D}_X$ فان $\bar{D}_Y = \bar{D}_X \cap Y = Y$.(باستخدام المبرهنة (9.5.3)) . هذا يؤدي الى ان D كثيفة في Y. #

الآن ندرس بعض العلاقات التي تربط الاقترانات المستمرة بالفضاءات التبولوجية و الفضاءات التبولوجية الجزئية .

مبرهنة 11.5.3 : ليكن (Y,T_Y) فضاءا تبولوجيا جزئيا من الفضاء التبولوجي (X , T) فان اقتران الاحتواء $i : Y \longrightarrow X$ مستمر .

البرهان: لتكن A مجموعة جزئية من X فان $i^{-1}(A) = A \cap Y$. هذا يعني ان لكل مجموعة مفتوحة A جزئية من X فان $i^{-1}(A) = A \cap Y$. واضح ان $A \cap Y$ مجموعة مفتوحة جزئية من Y وبالتالي فان i اقتران مستمر . #

نتيجة 12.5.3 : ليكن f اقترانا مستمرا من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S) و (Z , T_Z) فضاء تبولوجي جزئي من (X , T). فان مقصور الاقتران f على Z يكون اقتران مستمر من الفضاء التبولوجي (Z , T_Z) الى الفضاء التبولوجي (Y, S).

البرهان : بما ان Z مجموعة جزئية من X فيوجد اقتران الاحتواء $i : Z \longrightarrow X$ وبهذا نحصل على

$$(Z,T_Z) \xrightarrow{i} (X , T) \xrightarrow{f} (Y,S)$$

وبالتالي فان foi اقتران مستمر لأن مركباته مستمرة . نلاحظ ان foi يطابق مقصور الاقتران f على Z وبهذا ينتهي البرهان . #

نتيجة : 13.5.3 ليكن (Z,S_Z) فضاءا تبولوجيا جزئيا من الفضاء التبولوجي (Y , S) وليكن f اقترانا مستمرا من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Z , S_Z) فيوجد اقتران مستمر g من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S).

البرهان : بما ان Z مجموعة جزئية من Y فيوجد اقتران الاحتواء $i : Z \longrightarrow Y$ وبما ان $f: X \longrightarrow Z$ اقتران مستمر فان iof اقتران مستمر من X الى Y. يمكن اخذ الاقتران g عبارة عن الاقتران المركب iof. هذا يؤدي الى وجود اقتران مستمر g من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S). #

درسنا فيما سبق (الجزء الرابع من الفصل الثالث) نوعين من الاقترانات وهما الاقتران المفتوح والاقتران المغلق . سوف نقوم بدراستهما على ضوء مفهوم الفضاءات الجزئية .

برهنة 14.5.3 : ليكن i اقتران الاحتواء من الفضاء التبولوجي الجزئي (Y, T_Y) الى الفضاء التبولوجي (X , T). فان i اقتران مفتوح (مغلق) اذا وفقط اذا Y مجموعة مفتوحة (مغلقة) من X.

البرهان : نفرض ان i اقتران مفتوح فان $i(Y) = Y$ مجموعة مفتوحة من X (لأن Y مجموعة

مفتوحة في الفضاء الجزئي $((Y , T_Y))$. بالعكس لتكن B مجموعة مفتوحة جزئية من Y. واضح ان B مجموعة مفتوحة جزئية من X(لأن $B \cap Y = B$) . وبطريقة مشابهة يمكن برهنة الحالة الثانية . #

مبرهنة 15.5.3 : ليكن f اقترانا مفتوحا (مغلقا) من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S) ولتكن B مجموعة جزئية من Y (لنرمز للمجموعة $f^{-1}(B)$ بالرمزD) فان الاقتران $f/D = g: D \longrightarrow B$ يكون مفتوحا (مغلقا) من الفضاء التبولوجي الجزئي (D , T_D) الى الفضاء التبولوجي الجزئي (B , S_B).

البرهان : لتكن E مجموعة مفتوحة جزئية من D. اذن توجد مجموعة مفتوحة A جزئية من X بحيث ان $E = D \cap A$ والان ننظر الى العلاقة : $g (E) = g (D \cap A) = B \cap f (A)$. بما ان $f(A)$ مجموعة مفتوحة جزئية من Y فان $g(E)$ مجموعة مفتوحة جزئية من B وبالتالي فان g اقتران مفتوح . بنفس الطريقة نعالج برهان g اقتران مغلق اذا كان f اقتران مغلق . #

مبرهنة 16.5.3 : ليكن f اقترانا مفتوحا (مغلقا) من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S). ولتكن Z مجموعة جزئية مفتوحة (مغلقة) من X فان مقصور الاقتران f على Z يكون اقترانا مفتوحا (مغلقا) .

البرهان : ناخذ اولا اقتران الاحتواء i من الفضاء التبولوجي (Z , T_Z) الى الفضاء التبولوجي (Y , S). نلاحظ ان i اقتران مفتوح (مغلق) حسب كون المجموعة Z مفتوحة (مغلقة) في الفضاء التبولوجي (X , T). الآن نأخذ تركيب الاقترانين foi فنحصل على اقتران مفتوح (مغلق) اعتمادا على الاقترانين i و f وان foi مقصور الاقتران f على Z. #

6.3 جداء الفضاءات التوبولوجية

يتناول هذا الجزء من هذا الفصل كيفية بناء تبولوجي على الجداء الديكارتي لعدد منته من المجموعات لفضاءات تبولوجية كذلك نتعرض للعلاقات الرئيسية بين فضاء جداء الفضاءات التبولوجية ومركباتها والاقترانات الاسقاطية المرتبطة بها ومن الجدير بالذكر لقد اقتصرنا على دراسة الجداء لعدد منته من الفضاءات التبولوجية ولكن ليس من الصعوبة تعميمها على عدد غير منته من الفضاءات التبولوجية .

ليكن كل من $(X_1 , T_1) , (X_2 , T_2), ..., (X_n , T_n)$ فضاءا تبولوجيا ولتكن

$X = \prod_{i\in 1}^{n} X_i$ مجموعة الجداء الديكارتي للمجموعات X_i. لبناء تبولوجي على المجموعة X

سوف نعتمد على التبولوجيات $T_1, T_2, ..., T_n$ المعرفة على $X_1 , X_2, ..., X_n$ ويمكن تلخيص عملية البناء هذه بالمبرهنة الآتية :

مبرهنة 1.6.3: لتكن $B = \{Bi\}_{i\in I}$ اسرة من المجموعات الجزئية من X حيث B تحقق الخواص الأتية :

1- X , ϕ تنتميان الى الأسرة B.

2- لكل D_2 , D_1 ينتميان الى B فان B تحتوي على تقاطعهما .

لتكن T تمثل مجموعة جميع المجموعات الجزئية من X والتي يمكن كتابتها على شكل اتحاد لعدد من عناصر B فان T تبولوجي على X.

البرهان : سوف نحقق الشروط الثلاثة من تعريف التبولوجي على المجموعة T. الشرط الأول واضح تحقيقه من تعريف الأسرة B. اما بالنسبة الى الشرط الثاني: نفرض ان A_2 , A_1 عنصران ينتميان الى T وبذلك يمكن كتابتهما بالشكل الأتي :

$$A_2 = \bigcup_{k\in K} B_k, A_1 = \bigcup_{j\in J} B_j$$

حيث ان (لكل $j\in J$ ولكل $k \in K$ فان B_k , B_j ينتميان الى B) . بذلك فان $B_j \cap B_k$ عنصر في B والآن ننظر الى العلاقة :

$$A_1 \cap A_2 = (\bigcup_{j\in J} B_j) \cap (\bigcup_{k\in K} B_k) = \bigcup_{(j, k)\in JxK} (B_j \cap B_k)$$

واضح ان $A_1 \cap A_2$ عنصر في T.

اخيرا من تعريف T وتعريف B بسهولة يمكن برهنة الشرط الأخير وبالتالي فان T تبولوجي على المجموعة X.

من المبرهنة اعلاه يمكن اثبات ان B تكون قاعدة للتبولوجي T. وذلك باستخدام تعريف

القاعدة أي لكل عنصر من عناصر B بالامكان كتابته بالشكل $B_1 \times B_2 \times \quad \times B_n$ حيث B_i مجموعة مفتوحة جزئية من X_i لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ ولازالت الاسرة B تحقق شروط المبرهنة. واضح ان T تبولوجيا على X قاعدته B وان T التبولوجيا الوحيدة مع هذه القاعدة .

ملاحظة : ليكن كل من $(X_1, T_1), (X_2, T_2)$ فضاءا تبولوجيا فان قاعدة فضاء الجداء لهما هي $B = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in T_1, A_2 \in T_2\}$.

واضح ان الشرط الاول متحقق اما الشرط الثاني فيمكن اثباته على النحو الاتي :

ليكن $C_1 \times C_2, D_1 \times D_2$ عنصريين من عناصر B فأن

$(C_1 \times C_2) \cap (D_1 \times D_2) = (C_1 \times D_1) \cap (C_2 \times D_2)$.

وبهذا فان $(C_1 \times C_2)\ (D_1 \times D_2)$ عنصر من عناصر B وباستخدام المبرهنة (3.6.1) فان B هي قاعدة لتبولوجيا الجداء على $X_1 \times X_2$.

الأن نتطرق الى تعريف فضاء الجداء بشكل عام :

تعريف 2.6.3 : يقال للفضاء التبولوجي (X, T) أنه فضاء الجداء للفضاءات التبولوجية (X_i, T_i) حيث $i = 1,2, \ldots, n$ اذا وفقط اذا كانت T هي التبولوجيا التي قاعدتها جميع المجموعات الجزئية A من X والتي يمكن كتابتها بالشكل الأتي :

$A = A_1 \times A_2 \times \quad \times A_n$ حيث $A_i \in T_i$ لكل $i = 1,2, \ldots, n$.

مثال 1 : ليكن كل من $(X_1,T_1), (X_2, T_2), \ldots, (X_n, T_n)$ فضاءا تبولوجيا بحيث ان T_i التبولوجيا الضعيفة على X_i لكل $i = 1,2, \ldots, n$ فان تبولوجيا الجداء تكون التبولوجيا الضعيفة على X ايضا .

الحل : ليكن $A \neq \phi$ عنصرا ما من عناصر T. اذن $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ حيث $A_i \in T_i$ هذا يعني ان $A_i = X_i$ او $A_i = \phi$ لكل $i = 1,2, \ldots, n$. اذا وجد $j \in \{1,2, .., n\}$ بحيث ان $A_j = \phi$ فان $A = \phi$. اما اذا كان $A_j = X_j$ لكل j فان $A = X$، وهذا يؤدي الى ان T التبولوجيا الضعيفة على X.

مثال 2 : ليكن (R,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي فان $R^2 = R \times R$ يمثل المستوي الاقليدي فان لكل فترة مفتوحة $(a,b) \subseteq R$ يمكن تعريف مجموعتين جزئيتين من R^2 بالشكل

الاتي : $A = \{(x,y) \in R^2: a < x < b\}$ وتسمى المجموعة المفتوحة العمودية و $B = \{(x,y) \in R^2: a < y < b\}$ وتسمى المجموعة المفتوحة الافقية . فان جداء الفضاء التبولوجي للفضاء (R,T) مع نفسه متولد من تجمع جداء جميع المجموعات العمودية والافقية في المستوي ويسمى بفضاء الاقليدي للمستوي .

مبرهنة 3.6.3 : ليكن (X,T) فضاء الجداء لأسرة الفضاءات التبولوجية (X_1, T_1) , (X_2 , T_2) , ..., (X_n, T_n) . ولتكن B_i قاعدة للتبولوجي T_i لكل $i = 1,2, ...,n$ فان B قاعدة لتبولوجيا الجداء حيث ان

$$B = \{ W = \prod_{i\in 1}^{n} D_i : D_i \in B_i\}$$

البرهان : يلاحظ ان عناصر B عبارة عن مجموعات مفتوحة من X والسبب في ذلك لان أي عنصر من عناصر B يمثل جداء لمجموعات مفتوحة . الآن نفرض ان A عنصرا ما من عناصر T هذا يؤدي الى ان $A = A_1 x\ A_2\ x ...x\ A_n$ حيث ان $A_i \in T_i$ لكل $i = 1,2,..., n$ بما ان B_i قاعدة للتبولوجي T_i لكل i فان $A_i = \bigcup_{j\in J} B_{ij}$ حيث $B_{ij} \in B_i$. هذا يعني ان

$$A = \bigcup_{j\in J} B_{1j}\ x \bigcup_{j\in J} B_{2j}\ x\ ...\ x \bigcup_{j\in J} B_{nj}$$

وبالتالي فان A عبارة عن اتحاد لمجموعات مفتوحة من B . اذن B قاعدة للتبولوجي T . #

مبرهنة : 4.6.3 ليكن (X , T) فضاء الجداء للفضاءات التبولوجية (X_1 , T_1) , (X_2 , T_2), ..., (X_n, T_n) ولتكن N مجموعة جزئية من X تحتوي على النقطة $a = (a_1,a_2, ... ,a_n)$. فان N جوار الى a اذا وفقط اذا N تحتوي على مجموعة جزئية من نوع $N_1\ x\ N_2\ x ...\ x\ N_n$ حيث ان N_i جوار الى a_i لكل $i = 1,2, ... , n$.

البرهان : ليكن N جوار للنقطة a فان N تحتوي على مجموعة مفتوحة مثل A و a تنتمي الى A. بهذا يمكن كتابة A بالشكل الأتي :

$$A = \bigcup_{j\in J} A_{j1}\ x\ B_{j2}\ x\ ...\ x\ A_{jn}$$

حيث A_{ij} مجموعة مفتوحة من X لكل $j \in J$ ولكل $i \in \{1,2, ..., n\}$. بما ان $a \in A$ اذن يوجد $k \in \{1,2, ... ,n\}$ بحيث ان $a \in A_{k1} \times A_{k2} \times ... \times A_{kn}$ هذا يعني ان $a_i \in A_{ki}$ لكل $i \in \{1,2, ... , n\}$ نأخذ $N_i = A_{ki}$ لكل i. فان N_i جوار الى a_i

(لأن A_{ki} مجموعة مفتوحة) وهذا يؤدي الى ان $N_1 \times N_2 \times ... \times N_n \subseteq A \subseteq N$.

بالعكس لتكن $N_1 \times N_2 \times ... \times N_n \subseteq N$، حيث N_i جوار الى a_i لكل $i \in \{1,2, ... , n\}$ فان N_i يحتوي على مجموعة مثل A_i لكل $i \in \{1,2,.. , n\}$ وتحتوي المجموعة A_i على النقطة a_i أي ان N تحتوي على المجموعة المفتوحة $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ وبدورها تحتوي على النقطة a. اذن N جوار الى a. #

مثال : ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي فان فضاء الجداء الحاصل من الفضاء التبولوجي (R , T) مع نفسه n من المرات أي (R^n , T^n) يسمى بالفضاء التبولوجي الحقيقي ذو البعد n (حيث T^n ترمز الى تبولوجيا الجداء (n من المرات) الى T) . واضح ان قاعدة الفضاء التبولوجي (R^n ,T^n) تتألف من المجموعات $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ بحيث ان A_i فترة مفتوحة في R. وكحالة خاصة ان اسرة جميع متوازي المستطيلات المفتوحة في الفضاء الاعتيادي تمثل قاعدة لفضاء الجداء (R^3 ,T^3).

مبرهنة 5.6.3 : ليكن (X , T) فضاء الجداء للفضاءات التبولوجية $(X_1, T_1), (X_2, T_2), ..., (X_n,T_n)$ و $p_i: X \longrightarrow X_i$ الاقتران الاسقاطي على X_i فان p_i اقتران مستمر ومفتوح .

البرهان : من تعريف الاقتران الاسقاطي نحصل على : لكل $a_i \in X_i$ فان $p_i (a) = a_i$ حيث $a = (a_1,a_2, ..., a_n)$ وان $a \in X$. هذا يعني ان لكل مجموعة مفتوحة A_i من X_i فان

$$P_i^{-1}(A_i) = X_1 \times X_2 \times ... \times X_{i-1} \times A_i \times X_{i+1} \times ... \times X_n.$$

هذا يؤدي الى ان $p_i^{-1}(A_i)$ مجموعة مفتوحة جزئية من X أي ان p_i اقتران مستمر. لبرهان p_i اقتران مفتوح نفرض ان $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ مجموعة مفتوحة في X فان $p_i (A) = A_i$ وان A_i مجموعة مفتوحة جزئية من X_i. اذن p_i اقتران مفتوح .

مبرهنة 6.6.3: ليكن (X,T) فضاء الجداء للفضاءات التبولوجية $(X_1, T_1), (X_2, T_2), \dots, (X_n, T_n)$. وليكن $f: Y \longrightarrow X$ اقتران من الفضاء التبولوجي (Y, S) الى الفضاء التبولوجي (X, T) فان الاقتران f مستمر اذا وفقط اذا كان $\{p_i o f\}$ اقترانا مستمرا لكل $i \in \{1,2, \dots, n\}$.

البرهان : اولا نفرض ان f اقتران مستمر فان $p_i o f$ اقتران مستمر لكل $i \in \{1,2, \dots, n\}$ (لأن p_i اقتران مستمر لكل i) . العكس نفرض ان لكل $i \in \{1,2, \dots, n\}$ فان $p_i o f$ اقتران مستمر وليكن A عنصرا من عناصر T. اذن توجد مجموعة $A_j \subseteq X_i$ مفتوحة وان $A = p_j^{-1}(A_j)$ وبهذا فان $f^{-1}(A) = f^{-1}(P_j^{-1}(A_j)) = (p_j o f)^{-1}(A_j)$. بما ان $p_j o f$ اقتران مستمر فان $f^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة جزئية من Y وهذا يعني ان f اقتران مستمر . #

مبرهنة 7.6.3 : ليكن (X,T) فضاء الجداء للفضاءات التبولوجية $(X_1,T_1), (X_2,T_2), \dots, (X_n, T_n)$. ولتكن S تبولوجيا اخرى معرفة على X فان $T \subseteq S$ اذا كانت p_i اقتران مستمر بالنسبة الى S لكل $i = 1,2, \dots, n$.

البرهان : ليكن A عنصرا من عناصر T فان $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ حيث A_i مجموعة مفتوحة جزئية من X_i لكل i. هذا يؤدي الى ان $p_i^{-1}(A_i)$ مجموعة مفتوحة جزئية من X ويمكن كتابتها بالشكل الاتي :

$p_i^{-1}(A_i) = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{i-1} \times A_i \times X_i + i^x \dots \times X_n$ وواضح ان $p_i^{-1}(A_i)$ عنصرا من عناصر S لكون p_i مستمرا على S. هذا يؤدي الى ان تقاطع المجموعات $p_i^{-1}(A_i)$ لكل $i = 1,2, \dots, n$ عنصرا من عناصر S وان تقاطعها يساوي المجموعة A. بهذا فان $T \subseteq S$.

يمكن القول بان T اصغر تبولوجيا على X بحيث ان p_i اقتران مستمر لكل $i = 1,2, \dots, n$.

مبرهنة 8.6.3: ليكن (X, T) فضاء الجداء للفضاءات التوبولوجية $(X_1,T_1), (X_2, T_2), \dots, (X_n, T_n)$ وان $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ مجموعة جزئية من X. لتكن $\overline{A}_i$ مجموعة انغلاق A_i في الفضاء التبولوجي (X_i, T_i) لكل $i = 1,2, \dots, n$ فان

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2 \times \dots \times \overline{A}_n.$$

البرهان : لتكن $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ نقطة ما من نقاط $\overline{A}$. فان $a_i \in X_i$ لكل $i = 1,2,\dots, n$ اعتمادا على المبرهنة (4.4.3) نحصل على ان $a_i \in p_i(a) \in p_i(\overline{A}) \subseteq \overline{p_i(A)} = \overline{A}_i$.

هذا يؤدي الى $a \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. بالعكس نفرض ان

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. هذا يعني ان $a_i \in A_i$ لكل $i \in \{1,2, \dots ,n\}$.

نفرض الآن ان B مجموعة مفتوحة من X تحتوي على a فان $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$ حيث B_i مجموعة مفتوحة جزئية من X_i تحتوي على العنصر a_i اذن $B_i \cap A_i \neq \phi$ لكل $i = 1,2, \dots, n$ وبالتالي فان $A \cap B \neq \phi$. اذن $a \in \bar{A}$. #

مبرهنة 9.6.3 : ليكن (X, T) فضاء الجداء للفضاءات التبولوجية $(X_1, T_1), (X_2, T_2), \dots, (X_n, T_n)$ و $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ مجموعة جزئية من X وان $A_i \neq \phi$ لكل $i \in \{1,2, \dots,n\}$ فان A مجموعة مغلقة اذا وفقط اذا A_i مجموعة مغلقة جزئية من X_i لكل $i = 1,2, \dots, n$..

البرهـــان : اولا لتكن A مجمـوعـــة مـغـلـقــة وهذا يعـني ان $A = \bar{A}$ أي ان $A_i = \bar{A}_i$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$ وهذا يؤدي الى ان A_i مجموعة مغلقة جزئية من X_i لكل $i = 1, 2, \dots, n$. وبالعكس نفرض ان $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ مجموعة جزئية من X بحيث ان A_i مجموعة مغلقة في X_i لكل $i = 1, 2, \dots, n$. هذا يعني ان $A_i = \bar{A}_i$ لكل i. وبالتالي فان $A = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \times \dots \times \bar{A}_n = \bar{A}$ اذن A مجموعة مغلقة في X. #

7.3 فضاءات القسمة

لتكن X مجموعة ما و R علاقة تكافؤ على X فان المجموعة X/R تسمى بمجموعة القسمة وعناصرها تمثل صفوف التكافؤ كما مر بنا في الفصل الأول .

كذلك الاقتران $q: X \longrightarrow X/R$ يسمى بالاقتران القانوني . يلاحظ ان q اقتران شامل.

لو فرضنا ان المجموعة X تمتلك التبولوجيا T. يمكن ان نسأل هل بالأمكان تعيين تبولوجي على المجموعة X/R مستنبط من التبولوجي T والاقتران q. التعريف ادناه يبين الجواب على هذا السؤال :

تعريف 1.7.3 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا وان R علاقة تكافؤ على المجموعة X وان $q: X \longrightarrow X/R$ الاقتران القانوني فان تبولوجيا القسمة T/R تعرف على المجموعة X/R

بالشكل الآتي : T/R تمثل اسرة جميع المجموعات الجزئية B من X/R بحيث ان $q^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة في X. ويرمز لفضاء القسمة بالرمز $(X/R , T/R)$.

مبرهنة 2.7.3: ليكن $(X/R ,T/R)$ فضاء القسمة للفضاء التبولوجي (X , T) فان الاقتران القانوني $q: X \longrightarrow X/R$ مستمر . وكل توبولوجي S على X/R يجعل الاقتران $q: (X,T) \longrightarrow (X/R,S)$ مستمر يكون محتوى في T/R.

البرهان : ببساطة ان الاقتران القانوني مستمر من تعريف التبولوجي T/R. لبرهان الجزء الثاني نفرض ان B عنصر من عناصر S فان $q^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة من X (لأن q اقتران مستمر) . فان $B \in T/R$ وذلك حسب تعريف T/R. هذا يؤدي الى ان

$q^{-1}(B) \in S \subseteq T/R$ لذلك يمكن القول بان T/R هو اقوى تبولوجي يعرف على X/R بحيث يكون q اقترانا مستمرا.

نتيجة 3.7.3 : ليكن $(X/R ,T/R)$ فضاء القسمة و F مجموعة جزئية من X/R. فان F مجموعة مغلقة في X/R اذا وفقط اذا $q^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X.

البرهان : نفرض اولا ان المجموعة F مغلقة في X/R . بما ان q اقتران مستمر فان $q^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة جزئية من X. بالعكس نفرض ان $q^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة من X. هذا يعني ان $C(q^{-1}(F))$ مجموعة مفتوحة من X. أي ان $C(q^{-1}(F)) = q^{-1}(C(F))$. هذا يؤدي الى ان $X/R - F$ مجموعة مفتوحة جزئية من X/R وبالتالي فان F مجموعة مغلقة من X/R.

مبرهنة 4.7.3 : ليكن $(X/R ,T/R)$ فضاء القسمة للفضاء التبولوجي (X ,T) و (Y,S) فضاءا توبولوجيا آخر . ليكن $f : X/R \longrightarrow Y$ اقتران من الفضاء التبولوجي $(X/R, T/R)$ الى الفضاء التبولوجي (Y, S) فان الاقتران f مستمر اذا وفقط اذا foq اقتران مستمر .

البرهان : اذا كان f اقتران مستمر واضح ان foq اقتران مستمر . بالعكس ليكن foq اقتران مستمر ولتكن B مجموعة مفتوحة جزئية من Y فان $(foq)^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة جزئية من X ومن جهة اخرى $q^{-1}(f^{-1}(B)) = (foq)^{-1}(B)$. فان $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة جزئية من X/R وبالاستناد الى تعريف T/R يؤدي الى ان الاقتران f مستمر . #

مثال : ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي ولنفرض Q علاقة تكافؤ على R. حيث Q معرفة بالشكل الآتي :

لكل عنصرين $r_1, r_2 \in R$ فان $(r_1 , r_2) \in Q$ اذا وفقط اذا كان $r_1 - r_2$ عددا نسبيا. واضح ان صفوف التكافؤ الى R حسب العلاقة Q هي :

لكل $r \in R$ فان $[r] = \{r + p:\ p \text{ عدد نسبي}\}$.

بما ان مجموعة الأعداد النسبية كثيفة في R فان جميع صفوف التكافؤ تكون مجموعات كثيفة في R. اذا فرضنا $q: R \longrightarrow R/Q$ الاقتران القانوني . لكي نكون تبولوجيا على R/Q. نفرض ان A مجموعة جزئية من R/Q بحيث ان $q^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة جزئية من R. هذا يعني ان $q^{-1}(A)$ عبارة عن مجموعة مفتوحة من R. بما ان A عبارة عن مجموعة صفوف تكافؤ تحتوي على مجموعة الأعداد النسبية . اذن $q^{-1}(A)$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية (لأن لكل مجموعة مفتوحة من R تحتوي على عدد نسبي). هذا يعني ان A تمثل المجموعة R/Q وبالتالي فان المجموعة المفتوحة الوحيدة والغير خالية هي R/Q. اذن التبولوجيا المتكونة على R/Q هي التبولوجيا الضعيفة . من هذا يتضح ان الاقتران q اقتران مفتوح . من جهة اخرى ان الاقتران q اقتران ليس مغلق والسبب في ذلك لأن المجموعة $\{0\}$ مغلقة في R ولكن $q(0)$ تمثل مجموعة الأعداد النسبية والتي هي ليست مغلقة في R/Q.

مما تقدم واضح ان تعريف فضاء القسمة اعتمد بشكل كلي على ان الاقتران القانوني q بانه اقتران شامل . وبذلك يمكن تعريف فضاء القسمة بشكل آخر :

تعريف 5.7.3 : ليكن $q: X \longrightarrow Y$ اقتران من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى المجموعة Y (حيث Y لا يوجد تبولوجي عليها) و q اقتران شامل . يمكن بناء تبولوجي على المجموعة Y ويسمى بالتبولوجيا المماثلة (Identification topology) بالاعتماد على الاقتران q والتبولوجي T. وذلك بالشكل التالي : تكون المجموعة الجزئية B من Y مفتوحة اذا وفقط اذا كان $q^{-1}(B)$ عنصر من عناصر T.

مثال : ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي و S دائرة معرفة بالشكل التالي :

$$S = \{(x,y) \in R \times R : x^2 + y^2 = 1\} .$$

نعرف الاقتران كالاتي :

لكل $\theta \in R$ فان $q(\theta) = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$.

يلاحظ ان الاقتران q اقتران شامل ومستمر وان لكل نقطتين θ_2 , θ_1 من نقاط R فان $q(\theta_1) = q(\theta_2)$ اذا كان $\theta_1 - \theta_2$ عدد صحيح . يمكن الاستعانة بالاقتران q والتبولوجيا T لبناء تبولوجي مثل W على S.

8.3 المتتاليات في الفضاءات التبولوجية

كما هو معروف ان مفهوم المتتاليات في موضوعي التفاضل والتكامل والتحليل الحقيقي له دور كبير في مناقشة فكرة النهايات (Limits). بعبارة اخرى مدى اقتراب نقاط المتتالية او تباعدها بالنسبة الى عدد r. سوف نتطرق بصورة مختصرة الى هذا الموضوع في الفضاءات التبولوجية وسيكون التقارب في مجموعة الأعداد الحقيقية حالة خاصة من مفهوم التقارب في الفضاءات التبولوجية ونبدأ هذا الجزء بتعريف المتتالية على مجموعة ما مثل X.

تعريف 1.8.3 : يسمى الاقتران f من مجموعة الأعداد الطبيعية N الى المجموعة X بمتتالية في X. واضح ان مجال الاقتران f مجموعة معروفة لذلك سوف تكون دراستنا مركزة على مدى الاقتران والذي يرمز له بالرمز $f(n) = x_n$ حيث x_n عناصر في X ولنرمز لهذه المجموعة بالرمز (x_n) .

تعريف 2.8.3 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا و (x_n) متتالية من عناصر X. نقول بان (x_n) متتالية متقاربة من العنصر a حيث $a \in X$ اذا وفقط اذا لكل مجموعة مفتوحة A جزئية من X تحتوي على a يوجد عدد صحيح موجب N بحيث ان $x_n \in A$ لكل $n > N$. أي ان A تحتوي على كل عناصر المتتالية ماعدا عدد منته من عناصرها .

مثال1 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا بحيث ان T التبولوجيا الضعيفة على X ولتكن (x_n) متتالية فيX فان (x_n) تتقارب الى x لكل $x \in X$. ان سبب ذلك لأن المجموعة المفتوحة الوحيدة غير الخالية في هذا الفضاء هي المجموعة X.

مثال 2 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا و T التبولوجيا القوية على X. فان أي متتالية (x_n) غير ثابتة في X لا تتقارب الى أي نقطة من نقاط X. السبب في ذلك لأن لكل نقطة $x \in X$ فان$\{x\}$ مجموعة مفتوحة وبالتأكيد لا تحتوي على كل عناصر المتتالية ماعدا عدد منته منها .

مثال 3 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا بحيث ان T تبولوجيا المتممات المنتهية ولتكن (x_n)

متتالية في X. فان (x_n) تتقارب لأي نقطة من نقاط المجموعة X وذلك لأن لكل مجموعة مفتوحة A تحتوي على النقطة a حيث a نقطة من نقاط X فان A تحتوي على كل عناصر المجموعة X ماعدا عدد منته منها وبهذا فانها تحتوي على كل عناصر المتتالية ماعدا عدد منته منها ومن هذا نستدل على ان أي متتالية في هذا الفضاء تكون متقاربة الى جميع نقاط الفضاء وبذلك فان نقاط التراكم للمتتالية هي المجموعة X.

مبرهنة 3.8.3 : ليكن (X , d) فضاءا متريا و $a \in X$ فان a نقطة تقارب الى المتتالية (x_n) اذا وفقط اذا لكل كمية موجبة $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث ان$d (x_n, a) < \varepsilon$ لكل $n > N$.

البرهان : نفرض ان a نقطة تقارب الى المتتالية (x_n) ونفرض وجود كمية موجبة $\varepsilon > 0$ فان الكرة المفتوحة $B (a; \varepsilon)$ تمثل مجموعة (جوار) مفتوحة الى النقطة a وبهذا فان $B (a;\varepsilon)$ تحتوي على كل عناصر المتتالية (x_n) هذا يعني وجود عدد صحيح موجب N بحيث ان x_n تنتمي الى$B (a; \varepsilon)$ لكل $n > N$. أي ان $d (x_n,a) < \varepsilon$ لكل $n > N$. بالعكس نفرض انU مجموعة مفتوحة تحتوي على النقطة a. هذا يعني وجود كرة مفتوحة $B (a; \varepsilon)$ جزئية من U. من الفرض نحصل على ان $B (a; \varepsilon)$ تحتوي على x_n لكل $n > N$ وهذا يعني ان المتتالية متقاربة الى a.

مبرهنة: 4.8.3 ليكن(X ,T) فضاءا تبولوجيا و $A \subseteq X$. اذا كانت النقطة a نقطة تقارب الى متتالية في A فان a تنتمي الى مجموعة انغلاق A.

البرهان : لتكن (x_n) متتالية متقاربة الى a بحيث ان $x_n \in A$ لكل n. نفرض انU مجموعة مفتوحة تحتوي على a. هذا يعني ان U تحتوي على كل عناصر المتتالية (x_n) عدا عدد منته منها وبهذا فان $U \cap A \neq \phi$. هذا يؤدي الى ان a نقطة في مجموعة انغلاق A.

مبرهنة 5.8.3 : ليكن f اقترانا مستمرا من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S) ولتكن (x_n) متتالية في X متقاربة الى a فان المتتالية $(f (x_n))$ تكون متقاربة الى $f(a)$.

البرهان : لتكن B مجموعة مفتوحة من Y تحتوي على النقطة $f(a)$ فان $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة من X تحتوي على النقطة a. هذا يعني ان $f^{-1}(B)$ تحتوي على كل عناصر المتتالية (x_n) ماعدا عدد منتـه من عناصرها . يؤدي هذا الى ان B تحتوي على كل عناصر المتتالية $(f(X_n))$ ماعدا عدد منته من عناصرها . اذن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة الى النقطة $f(a)$.

8.3 اسئلة

1- لتكن $X = \{1, 2, 3, 4\}$. برهن ان كل من T_2, T_1 تبولوجي على X وان T_3 , T_4 ليست تبولوجيتان على X مع ذكر السبب في الحالة الثانية :

$$T_1 = \{\phi, \{1\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, X\}$$

$$T_2 = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, X\}$$

$$T_3 = \{\phi, \{1\}, \{3,4\}, \{2, 3, 4\}, X\}$$

$$T_4 = \{\phi, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, X\}$$

2- لتكن $X = \{a,b\}$. اذكر جميع التبولوجيات التي يمكن تكوينها على X.

3- لتكن X مجموعة ما وان T التبولوجيا القوية على X . برهن ان كل مجموعة جزئية من Xتكون مفتوحة ومغلقة في آن واحد .

4- لتكن N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وان $A_n = \{m \in N: m \geq n\}$. ولتكن $T = \{\phi\} \cup \{A_n\}_{n \in N}$. هل ان T تبولوجي على N ؟ بين ذلك مع ذكر السبب ان وجد ؟

5- لتكن A مجموعة جزئية من X. لتكن $T = \{B:B \subseteq X \text{ and } A \subseteq B\} \cup \{\phi\}$.

برهن ان T تبولوجي على X . اذا كانت $A = \phi$ هل ان T تبولوجي على X؟ وضح ذلك .

6 - لتكن A مجموعة جزئية من X و S تبولوجي على A. برهن ان :

1- $S \cup \{X\}$ توبولوجي على X.

2- اذا كانت B قاعدة للتبولوجي S. هل ان $B \cup \{X\}$ قاعدة للتبولوجي $S \cup \{X\}$.

7- لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ وان $T = \{\phi, \{c\{ , \{d\} , \{a,b,d,e\} , X\}$ هل ان T تبولوجي على X؟ اذا كان كذلك اوجد المجموعات المغلقة من X وفق التبولوجي T.

8- ليكن T_1, T_2 تبولوجيتين على X. برهن ان $T_1 \cap T_2$ تبولوجي على X. اعط مثالا يوضح

انه ليس من الضروري ان يكون $T_1 \cup T_2$ تبولوجي على X. عمم السؤال لأكثر من تبولوجيتين وبرهن ذلك .

9- لتكن $X = Z$ مجموعة الأعداد الصحيحة . بين اصغر تبولوجيا تعرف على X بحيث ان المجموعات الآتية تكون مفتوحة في كل من الحالتين التاليتين :

1- X , $\{-1,0\}$, $\{-3, 2, 4\}$.

2- X , $\{-1, 0\}$, $\{0 , 1\}$, $\{-1, 2, 3, 4\}$.

10 - ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا قاعدته B ولتكن A مجموعة جزئية من X و x عنصر من عناصر X فان لكل عنصر B_1 من القاعدة B يحتوي على x يتقاطع مع المجموعة A اذا وفقط اذا لكل مجموعة مفتوحة W تحتوي على x فان $A \cap W = \phi$

11 - لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و B اسرة جميع الفترات النصف مفتوحة $[a,b)$ حيث $a,b \in R$ بحيث ان $a < b$ برهن ان الأسرة B تمثل قاعدة لتبولوجيا ما على R.

12- ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا وان B قاعدة للتبولوجي T. برهن ان T اصغر تبولوجي على X يحتوي على B.

13 - لتكن X مجموعة منتهية . ما هي اصغر قاعدة للتبولوجيا القوية على X وما هي عدد القواعد الممكنة للتبولوجيا القوية على X.

14- ليكن R^2 المستوي الحقيقي الأقليدي و B اسرة الدوائر المفتوحة في R^2.

1- هل تمثل B قاعدة لتبولوجيا معينة T على R^2 ؟

2- برهن ان أي مجموعة منتهية في T تكون مغلقة .

3- هل تكون QxQ مجموعة كثيفة في T؟ (حيث Q مجموعة الأعداد النسبية)

15 - لتكن $X = \{a,b,c\}$ وأن $T = \{\phi, X, \{a\}\}$. أوجد قاعده جزئيه للتبولوجي T تتكون من عناصر قليلة قدر الإمكان.

16- ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X. برهن ان :

1 - $Bd (A) \cap E (A) = In (A) \cap Bd (A) = In (A) \cap E (A) = \phi$.

2 - $X = E (A) \cup Bd (A) \cup In (A)$.

17 – ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و $\{A_i\}_{i\in I}$ اسرة مجموعات جزئية من X. برهن ان

1- $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \bar{A}_i$.

2- $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \supseteq \bigcup_{i\in I} \bar{A}_i$.

3- $\overline{A_1 - A_2} \subseteq \bar{A}_1 - \bar{A}_2$.

18- ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي . برهن ان النقاط المتاخمة للفترة (a,b) تساوي النقاط المتاخمة للفترة المغلقة $[a , b]$ وتساوي المجموعة $\{a ,b\}$.

19- لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X , T) و $B\in T$ بحيث ان $B \cap A = \phi$. برهن ان $B \cap \bar{A} = \phi$

20- ليكن (R^2 , T) الفضاء التبولوجي الأقليدي و A مجموعة النقاط (x , y) في R^2 بحيث ان $x^2 + y^2 \leq 1$. برهن ان . $bd (A) = \{(x,y) R : x^2 + y^2 = 1\}$.

21- لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X , T) وان B مجموعة مفتوحة من X برهن ان $B \cap A \quad B \cap A$.

22- ليكن (R^2 , T) الفضاء التبولوجي الأقليدي . برهن ان $Bd(Rx\{0\})=Rx\{0\}$، $In (Rx\{0\}) = \phi$, $R x\{0\} = \overline{R x \{0\}}$ (حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية) .

23- اعط مثالا يوضح بان ليس من الضروري ان تكون المجموعة الكثيفة A في الفضاء التبولوجي (X , T) تمتلك نقاط داخلية .

24- لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X , T) فان $Bd (A) = \phi$ اذا وفقط اذا كانت A مجموعة مفتوحة و مغلقة في آن واحد .

25- ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي ولتكن Z مجموعة الأعداد الصحيحة . أوجد كلا من المجموعات الأتية : $\bar{Z}$, $In (Z)$, Z', $Bd (Z)$, $E (Z)$.

26- لتكن A , B مجموعتين جزئيتين من الفضاء التوبولوجي (X , T). برهن ان :

1- اذا كانت $A\subseteq B$ فان $A' \subseteq B'$.

2 – $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

27- ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا وان A مجموعة جزئية من X فان $\bar{A} = A\cup Bd (A)$.

28 – لتكن A , B مجموعتين جزئيتين من الفضاء التبولوجي (X , T). برهن العلاقات الصحيحة واعط مثالا للغير صحيحة لكلا مما يلي:

1 – $Bd(Bd(A)) \subseteq Bd(A)$.

2 – $Bd(A \cap B) \subseteq Bd(A) \cap Bd(B)$.

3 – $Bd(A \cup B) \subseteq Bd(A) \cup Bd(B)$.

4 – $Bd(In(A)) \subseteq Bd(A)$.

5 – $In(A) = A - Bd(A)$.

6 – $(A')' = A'$.

7 – $E(E(A)) = In(A)$.

8 – $E(A \cup B) = E(A) \cup E(B)$؛

29 – لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X , T) ، برهن ان :

1 – A مجموعة مفتوحة من X اذا وفقط اذا كانت $Bd(A) \subseteq C(A)$.

2 – A مجموعة مغلقة اذا وفقط اذا $Bd(A) \subseteq A$.

30 – ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي . هل توجد مجموعة جزئية A من R بحيث ان $Bd(A) \neq Bd(In(A)) \neq Bd(E(A))$.

31 – كما في السؤال (30) هل توجد مجموعتان جزئيتان B , A من R بحيث ان
$\bar{A} \cap \bar{B} \neq \overline{A \cap B}$

32 – ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا . هل توجد مجموعتين A , B مختلفتين جزئيتين من X بحيث ان $A' = B'$.

33– ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة مفتوحة من X ولتكن F مجموعة مغلقة من X. برهن ان $A - F$ مجموعة مفتوحة من X و $F - A$ مجموعة مغلقة من X .

34– ليكن T , S تبولوجيتين على المجموعة X بحيث ان $T \subseteq S$ ولتكن A مجموعة جزئية من X. برهن ان $\bar{A}_S \subseteq \bar{A}_T$.

35– ليكن كل من (X , T) ، (Y , S) فضاءا تبولوجيا و $f : X \longrightarrow Y$ اقترانا شاملا

ومستمرا . اعط مثالا يوضح انه : اذا كانت B قاعدة للتبولوجي T على X فان f(B) قاعدة للتبولوجي S على Y.

36- ليكن كل من (X ,T) , (Y ,S) فضاءا تبولوجيا بحيث ان T التبولوجيا القوية على X. برهن انه اذا كانت S هي التبولوجيا الضعيفة على Y فأن أي اقتران $f:X \longrightarrow Y$ مستمر.

37- ليكن كل من (X , T), (Y , S) فضاءا تبولوجيا و $\{A_i\}_{i\in N}$ اسرة من المجموعات الجزئية من X بحيث ان $X = \bigcup_{i\in N} A_i$ و $A_i \subseteq A_{i+1}$ لكل $i \in N$. برهن ان

$f: X \longrightarrow Y$ اقتران مستمر اذا كان $f_i : A_i \longrightarrow Y$ اقتران مستمر لكل i.

38- ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي . بين ان كل فترتين مفتوحتين متكافئتان توبولوجيا . كذلك كل فترتين مغلقتين متكافئتان توبولوجيا .

39- ليكن f اقترانا من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S) فان f اقتران تكافؤ توبولوجي اذا وفقط اذا كان

1- لكل مجموعة جزئية N من X تحتوي على النقطة x . N جوار الى x اذا وفقط اذا f (N) جوار للنقطة f(x).

2- f اقتران تقابلي .

40- ليكن كل من (X ,T) , (Y, S) فضاءا تبولوجيا و $f : X \longrightarrow Y$ اقتران ما فان f اقتران مستمر اذا وفقط اذا كان لكل مجموعة جزئية B من X فإن

$f^{-1} (In (B)) \subseteq In (f^{-1} (B))$.

41- ليكن كل من (X ,T) , (Y, S) فضاءا تبولوجيا و $f:X \longrightarrow Y$ اقترانا شاملا ومستمرا . لتكن A مجموعة كثيفة في X فان f(A) مجموعة كثيفة فيY. هل الاقتران شامل ومستمر اذا كانت الصورة المباشرة لأي مجموعة كثيفة من X مجموعة كثيفة من Y؟

42- احسب جميع الاقترانات المستمرة من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S) اذا كان

$X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $T = \{\phi , \{2\}, \{2,3\}, X\}$.

$Y = \{a,b\}$, $S = \{\phi, \{b\} , Y\}$

43- ليكن كل من (Z,Q) , (X,T) , (Y, S) فضاءا تبولوجيا و $g:Y \longrightarrow Z$, $f: X \longrightarrow Y$ اقترانين . برهن ان f اقتران مستمر اذا كان gof اقتران مستمر و g اقتران تكافؤ تبولوجي.

44- لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة X. برهن ان $T = p(A) \cup \{X\}$ تبولوجي على X (حيث $P(A)$ تمثل جميع المجموعات الجزئية من A) اذا كانت $A \neq \phi$ وبرهن ان $X = \overline{A}$ في الفضاء التبولوجي (X, T). ما هي التبولوجيا المنتجة على A من T.

45- لتكن A مجموعة مفتوحة جزئية من الفضاء التبولوجي (X, T) . برهن ان كل مجموعة جزئية B من الفضاء التبولوجي المنتج (A, T_A) تكون مفتوحة اذا وفقط اذا B مجموعة مفتوحة جزئية من X.

46- لتكن كل من A , B مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X, T) بين صحة العلاقات التالية :

1 - المجموعة $In(A \cap B)$ (بالنسبة للتبولوجي T_A) تحتوي على تقاطع المجموعة Aمع المجموعة $In(B)$ بالنسبة للتبولوجي T.

2 - تقاطع المجموعة A مع المجموعة $\overline{B}$ (بالنسبة للتبولوجي T) تحتوي على المجموعة $\overline{A \cap B}$ (بالنسبة للتبولوجي T_A) .

3 - تقاطع المجموعة A مع $Bd(B)$ (بالنسبة للتبولوجي T) تحتوي على المجموعة $Bd(A \cap B)$ (بالنسبة للتبولوجي T_A) .

47 - برهن ان الفترة المفتوحة (a, b) من مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل فضاءا جزئيا من الفضاء التبولوجي الحقيقي وتكافئه تبولوجيا .

48 - لتكن كل من A , B مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X, T) بحيث ان$X = A \cup B$. لتكن D مجموعة جزئية من $A \cap B$. برهن ان D مجموعة مفتوحة من X اذا وفقط اذا D مجموعة مفتوحة في الفضائيين الجزئيين (A, T_A), (B, T_B).

49 - ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا و $A = \{(x, X): x \in X\}$. برهن ان (X, T) يكافىء تبولوجيا الفضاء الجزئي (A, T_A).

50- ليكن كل من (X, T) , (Y, S) فضاءا تبولوجيا و $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ وليكن $X \times Y$ فضاء الجداء لهما برهن ان :

1 – $In(A\times B) = In(A) \times In(B)$.

2 – $Bd(A\times B) = (Bd(A)\times \bar{B}) \cup (\bar{A}\times Bd(B))$.

51– يقال للثلاثي $(G, *, T)$ زمرة توبولوجية اذا كانت :

1 – $(G,*)$ زمرة.

2 – (G,T) فضاء تبولوجي.

3 – الاقتـران $f: G\times G \longrightarrow G$ المعـرف بالشـكل التـالي $f((g_1,g_2)) = g_1 * g_2^{-1}$ يكون مستمراً بالنسبة لتبولوجيا الجداء على المجموعة $G \times G$.

1 – برهـن ان $(G, *, T)$ زمـرة تبـولـوجـيـة اذا وفـقـط اذا كـان $(G, *)$ زمـرة و (X, T) فضاء تبولوجيا وان الاقترانيين $f: G\times G \longrightarrow G$, $h: G \longrightarrow G$ المعرفين بالشكل $f(g_1, g_2) = g_1 * g_2$, $h(g) = g^{-1}$ مستمران .

2 – برهن ان أي زمرة $(H, *)$ مع التبولوجيا القوية تتحول الى زمرة تبولوجية .

52– لتكن $(G, *, T)$ زمرة تبولوجية و N زمرة جزئية اعتيادية (Normal subgroup) من G. برهن ان $(G/N, *, T/N)$ زمرة تبولوجيـة . هل الاقتران القـانوني $q:G \longrightarrow G/N$ مفتوح؟

53 – لتكن F مجموعة جزئية من فضاء الجداء (X, T) حيث $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. فان F مجموعة مغلقة من X اذا وفقط اذا F عبارة عن تقاطع مجموعات كل واحدة منها يمكن كتابتها بالصيغة الاتية $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ حيث F_i مجموعة مغلقة من X_i.

54 – لتكن B قاعدة للفضاء التبولوجي (X, T). برهن ان المتتالية (x_n) تتقارب الى x اذا وفقط اذا لكل B_i في B تحتوي على x فان B_i تحتوي على كل عناصر المتتالية (x_n) ماعدا عدد منته منها .

55– لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و $T = \{\phi, (0,1)\, R\}$ تبولوجي على R. هل المتتاليتان $(1/n)$, $(1 + 1/n)$ تمتلك نقاط تقارب . عند النفي وضح سبب ذلك .

56 – لتكن X مجموعة غير خالية و T,S تبولوجيتان على X بحيث ان $S \subseteq T$. برهن او اعطي مثالا لما يأتي : (المثال يجب ان يبين عدم صحة العبارة)

1 – اذا كانت (x_n) متتالية متقاربة في (X, S) فانها متقاربة في (X, T).

2 – اذا كانت (x_n) متتالية متقاربة في (X, T) فانها متقاربة في (X, S).

الفصل الرابع

قابلية الانفصال ومسلمات العد

قابلية الانفصال و مسلمات العد

درسنا في الفصل الثالث الفضاءات التبولوجية بشكلها العام ولأجل الحصول على نتائج اخرى اكثر دقة سوف نضيف بعض الشروط والفرضيات على مفهوم الفضاءات التبولوجية لكي نحصل على فضاءات ذات مميزات خاصة يمكن من خلالها تصنيف بعض الفضاءات التبولوجية . يتطرق هذا الفصل الى امكانية معرفة كون نقطتين في الفضاء منفصلتين او معرفة نقطة ومجموعة او مجموعتين منفصلتين من فضاء تبولوجي باستخدام مجموعاته المفتوحة . كذلك سوف نتطرق الى مسلمتي العد الأولى والثانية في فضاء تبولوجي ما .

1:4 الفضاءات T_1 - $T_{1/2}$ - T_0

سنتعرض في هذا الجزء على ابسط انواع الفضاءات التبولوجية التي تتصف بمواصفات الانفصال ولنبدأ بتعريف النوع الاول .

تعريف 1.1.4 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا و a , b نقطتين مختلفتين من نقاط X. يسمى هذا الفضاء بفضاء T_0 اذا وفقط اذا وجدت مجموعة مفتوحة جزئية من X تحتوي على احدى النقطتين ولا تحتوي على الاخرى .

مثال 1: ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا بحيث ان X تحتوي على اكثر من نقطة واحدة و T التبولوجيا القوية على X. يلاحظ ببساطة ان الفضاء التبولوجي (X , T) من نوع فضاء T_0.

مثال 2 : لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ و $T = \{\phi, \{4\} , \{1,3\}, \{2,4\}, \{1,3,4\}, X\}$ واضح ان T تبولوجي على X وان (X ,T) فضاء تبولوجي ليس من نوع فضاء T_0 . السبب في ذلك عدم وجود مجموعة مفتوحة تحتوي على احدى النقطتين واحد او ثلاثة ولا تحتوي على الآخرى.

مثال 3 : ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي . بسهولة يمكن برهنة ان هذا الفضاء من نوع فضاء T_0. والسبب في ذلك لأن لكل نقطتين مختلفتين من نقاط R توجد مسافة بين هاتين النقطتين وبذلك توجد فترة مفتوحة تحتوي على احد النقطتين ولا تحتوي على الاخرى .

مبرهنة 2.1.4 : يكون الفضاء التوبولوجي (X ,T) من نوع فضاء T_0 اذا وفقط اذا لكل نقطتين مختلفتين a,b من نقاط X فان مجموعة انغلاق $\{a\}$ لا تساوي مجموعة انغلاق $\{b\}$.

البرهان : نفرض ان a,b نقطتين مختلفتين من نقاط X وان الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_0. عليه توجد مجموعة مفتوحة B جزئية من X تحتوي على a مثلا ولا تحتوي على b مما يعني ان $a \notin \overline{\{b\}}$. بما ان $a \in \overline{\{a\}}$ فان $\overline{\{a\}} \neq \overline{\{b\}}$. لاثبات العكس نفرض ان x, y أي نقطتين مختلفتين من نقاط X بحيث ان $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. هذا يؤدي الى وجود عنصر z ينتمي الى $\overline{\{x\}}$ مثلا ولا ينتمي الى $\overline{\{y\}}$. يؤدي ذلك الى وجود مجموعة مفتوحة B تحتوي على x و $B \cap \{x\} = \phi$. أي B تحتوي على x ولا تحتوي على y. مما يعني ان الفضاء التبولوجي (X,T) من نوع فضاء T_0. #

تعريف 3.1.4 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و a نقطة ما تنتمي الى X. تسمى a نقطة عامة (Generic point) اذا وفقط اذا $X = \overline{\{a\}}$. هذا مماثل لتعريف المجموعة الكثيفة الأنفة الذكر ولكن في هذا التعريف المجموعة متكونة من عنصر واحد فقط .

مبرهنة 4.1.4 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا من نوع فضاء T_0 . فأنه على الأكثر يمتلك نقطة عامة واحدة.

البرهان : نفرض ان b , a نقطتين عامتين في الفضاء التبولوجي (X , T) عليه فأن $X = \overline{\{a\}} = \overline{\{b\}}$. بما ان الفضاء من نوع T_0 فهذا يخالف المبرهنة (2.1.4). اذن اذا امتلك الفضاء التبولوجي نقطة عامة فهي وحيدة . #

تعريف 5.1.4 : يسمى الفضاء التبولوجي (X ,T) بفضاء $T_{1/2}$ اذا وفقط اذا لكل نقطة x تنتمي الى X فان المجموعة المشتقة للمجموعة $\{x\}$ تكون مغلقة في X.

مثال : لتكن $X = R$ مجموعة الأعداد الحقيقية و T اسرة جميع الفترات المفتوحة من النوع (a, ∞) (بالاضافة الى المجموعة الكلية والمجموعة الخالية) حيث a عنصر ينتمي الى X أي ان $T = \{(a , \infty) : a \in X\} \cup \{\phi,X\}$. (يسمى هذا الفضاء بفضاء الأشعة اليمينية).

سنوضح ان الفضاء التبولوجي (X , T) من نوع فضاء T_0 وليس من نوع فضاء $T_{1/2}$. لتكن a,b نقطتين مختلفتين من نقاط X فان $a < b$ او $b < a$. نفرض ان $a < b$. واضح ان (a,∞) مجموعة مفتوحة تحتوي على b ولا تحتوي على a وهذا يعني ان الفضاء التبولوجي من

نوع فضاء T_0. الآن نبين انه ليس من نوع فضاء $T_{1/2}$. لتكن a نقطة ما في X فان $\{a\}'$ تساوي المجموعة المفتوحة $(-\infty , a)$. أي ان $\{a\}'$ ليست مجموعة مغلقة وبالتالي فان الفضاء التبولوجي ليس من نوع فضاء $T_{1/2}$.

لكن العكس صحيح : أي ان الفضاءات التبولوجية من نوع فضاء $T_{1/2}$ يجب ان تكون من نوع فضاءات T_0 كما في المبرهنة التالية :

مبرهنة 6.1.4 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا من نوع فضاء $T_{1/2}$ فان (X ,T) من نوع فضاء T_0 .

البرهان : لتكن a ,b نقطتين مختلفتين من نقاط X. فان $\{a\}'$, $\{b\}'$ مجموعتان مغلقتان في X (لأن الفضاء من نوع فضاء $T_{1/2}$) . واضح ان المجموعة $X - \{a\}'$ مفتوحة و تحتوي على النقطة a (لأن a لا تنتمي الى $\{ a \}'$) . الأن نبين ان النقطة b لا تنتمي الى المجموعة $X- \{b\}'$. نفرض جدلا ان b تنتمي الى $X- \{a\}'$ هذا يعني ان b لا تنتمي الى $\{a\}'$ وبالتالي توجد مجموعة مفتوحة مثل A تحتوي على النقطة b وان $(A -\{b\}) \cap \{a\} = \phi$. أي ان $a \notin A$ وهذا يعني اننا حصلنا على مجموعة مفتوحة A تحتوي على b ولا تحتوي على a. اما اذا كانت b لا تنتمي الى المجموعة $X - \{a\}'$. هذا يعني اننا حاصلنا على مجموعة مفتوحة $B = X - \{a\}'$ تحتوي على a ولا تحتوي على b. و بهذا فان في كلتي الحالتين يكون الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_0. #

مبرهنة 7.1.4 : يكون الفضاء التبولوجي من نوع فضاء $T_{1/2}$ اذا وفقط اذا كان لكل نقطة a تنتمي الى X توجد مجموعتان F , A احدهما مفتوحة والاخرى مغلقة وان تقاطعهما يساوي المجموعة $\{a\}$.

البرهان : نفرض اولا ان الفضاء التبولوجي (X , T) من نوع فضاء $T_{1/2}$ ولتكن a نقطة ما من نقاط X . فان $F = \overline{\{a\}}$ مجموعة مغلقة تحتوي على المجموعة $\{a\}$ وان $A = X - \{a\}'$ مجموعة مفتوحة تحتوي على $\{a\}$. واضح ان $A \cap F = \{a\}$ (لأن $\{a\}'$ مجموعة جزئية من $\overline{\{a\}}$) .

بالعكس لتكن A مجموعة مفتوحة و F مجموعة مغلقة بحيث ان $A \cap F = \{a\}$. فان
$\{a\} \subseteq F$ وهذا يؤدي الى ان $\overline{\{a\}} \subseteq F$ وبهذا نحصل على
$\overline{\{a\}} \cap (X - A) = \overline{\{a\}} - (A \cap \overline{\{a\}}) = \overline{\{a\}} - (A \cap F) = \overline{\{a\}} - \{a\} = \{a\}'$ أي ان
$\{a\}'$ مجموعة مغلقة من X. اذن الفضاء التبولوجي من نوع فضاء $T_{1/2}$. #

مبرهنة 8.1.4 : لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X, T) تكون A' مجموعة مغلقة اذا وفقط اذا كان لكل نقطة a من X فان $\{a\}'$ مجموعة مغلقة . (أي ان الفضاء التبولوجي من نوع فضاء $T_{1/2}$) .

البرهان : اولا نفرض ان a نقطة ما تنتمي الى X. فان $\{a\}$ مجموعة جزئية من X. هذا يعني ان $\{a\}'$ مجموعة مغلقة . بالعكس لتكن A مجموعة جزئية من X. يكفي نبرهن أن مجموعة انغلاق المجموعة المشتقة الى A تساوي المجموعة المشتقة الى A أو بعبارة اخرى $\overline{A'} = A'$. واضح ان $A' \subseteq \overline{A'}$ ، ليكن a عنصرا ما ينتمي الى $\overline{A'}$. فان كل مجموعة مفتوحة B تحتوي على النقطة a تتقاطع مع المجموعة A' أي ان $A' \cap B \neq \emptyset$. هذا يعني ان $A \cap B \neq \emptyset$. نفرض الآن ان النقطة a لا تنتمي الى A'. هذا يؤدي الى وجود مجموعة مفتوحة D تحتوي على a وان $D \cap A = \{a\}$. ندعي ان المجموعة $D \cap A' \subseteq \{a\}'$ ليكن b عنصرا ما ينتمي الى المجموعة $D \cap A'$ ولتكن W مجموعة مفتوحة تحتوي على العنصر b. هذا يؤدي الى ان $D \cap W$ مجموعة مفتوحة تحتوي على b. بما ان

$$W \cap \{a\} = W \cap (D \cap A) \neq \emptyset$$

اذن $b \in \{a\}'$ وبهذا برهنا الادعاء . الآن ننظر الى العلاقة :

$$\{a\} \subseteq \overline{A'} \cap D \subseteq \overline{A' \cap D} \subseteq \overline{\{a\}'}$$

بما ان $\{a\}'$ مجموعة مغلقة فان $\overline{\{a\}'} = \{a\}'$. هذا يعني ان $a \in \{a\}'$. لكن $a \notin \{a\}'$ وهذا تناقض . اذن a تنتمي الى A'. #

الآن نتطرق الى بعض الصفات التي تورث من قبل الفضاءات التبولوجية الى فضاءاتها الجزئية وقبل ذلك نعطي التعريف الأتي :

تعريف 9.1.4: تسمى p صفة وراثية للفضاء التبولوجي (X, T) اذا وفقط اذا كان لكل فضاء جزئي (Y, T_Y) فانه يتمتع بالصفة p ايضا .

مبرهنة .4.1.10 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا ولنفرض ان لكل نقطة a من نقاط X توجد مجموعة مغلقة F تحتوي على a بحيث ان (F ,T_F) فضاء جزئي من نوع فضاء T_0 فان (X ,T) فضاء تبولوجي من نوع فضاء T_0 ايضا .

البرهان : نفرض ان a , b نقطتان مختلفتان من نقاط X. ولتكن F مجموعة مغلقة تحتوي على النقطة a. في حالة b لا تنتمي الى F فان X - F مجموعة مفتوحة تحتوي على b ولا تحتوي على a و بهذا فان الفضاء التبولوجي (X ,T) من نوع فضاء T_0. اما في حالة b تنتمي الى F. فان a ,b نقطتان مختلفتان من نقاط F. هذا يعني وجود مجموعة مغلقة E من F تحتوي على a مثلا ولا تحتوي على b. وبالتالي فان E مجموعة مغلقة من X. أي ان X - E مجموعة مفتوحة من X تحتوي على b ولا تحتوي على a . وبهذا يتم البرهان . #

مبرهنة 11.1.4 : يكون الفضاء التبولوجي (X ,T) من نوع فضاء T_0 اذا وفقط اذا وجد لكل نقطتين مختلفتين a ,b من نقاط X اقتران f مستمر من الفضاء التبولوجي (X , T) الى فضاء توبولوجي آخر من نوع فضاء T_0 بحيث ان $f(a) \neq f(b)$.

البرهان : نفرض ان الفضاء التبولوجي (X ,T) من نوع فضاء T_0. نأخذ الفضاء التوبولوجي الآخر هو نفس الفضاء (X , T). فان الاقتران الذاتي يحقق الشرط المطلوب . بالعكس لتكن a ، bنقطتين مختلفتين من نقاط Xوليكن $f : (X , F) \longrightarrow (Y, S)$ اقترانا مستمرا حيث أن (Y , S)فضاء تبولوجي من نوع فضاء T_0. نفرض ان B مجموعة مفتوحة تحتوي على النقطة f(a) ولا تحتوي على f(b). فان $f^{-1} (B)$ مجموعة مفتوحة جزئية من X تحتوي على النقطة a ولا تحتوي على النقطة b وبذلك فان (X , T) من نوع فضاء T_0. #

قبل ذكر النتيجة المستنبطة من المبرهنة اعلاه نذكر تعريف الصفة التبولوجية .

تعريف 12.1.4 : ليكن f اقتران تكافؤ تبولوجي من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S)، وليكن (X , T) يتصف بالصفة p. تسمى p صفة تبولوجية اذا وفقط اذا (Y , S) يتصف بالصفة p ايضا .

مبرهنة 13.1.14 : ان صفة كون الفضاء التبولوجي (X,T) من نوع فضاء T_0صفة تبولوجية .

البرهان : ينتج مباشرة من المبرهنة . (11.1.4) . #

مبرهنة 1.4 . 14 : ان صفة الفضاء التوبولوجي (X , T) من نوع فضاء T_0صفة وراثية .

البرهان: ليكن (X ,T) فضاءا توبولوجيا من نوع فضاء T_0و (A ,T_A) فضاء جزئي منه . نأخذ اقتران الاحتواء $i : (A , T_A) \longrightarrow (Y , T)$ واضح ان الاقتران i متباين (احادي) ومستمر ويحقق شروط المبرهنة (11.1.4). هذا يعني ان الفضاء الجزئي , (A,T_A)من نوع فضاء T_0. #

الآن ننتقل الى نوع آخر يفصل نقطتين مختلفتين في الفضاء التبولوجي بمجموعتين مختلفتين مفتوحتين أحداهما تحتوي على النقطة الأولى ولا تحتوي على الأخرى والثانية تحتوي على النقطة الثانية ولا تحتوي على النقطة الأولى وبصورة اكثر دقة :

تعريف 4 . 1 . 15 : يسمى الفضاء التبولوجي (X ,T) بفضاء T_1 اذا وفقط اذا كان لكل نقطتين مختلفتين a , b من X توجد مجموعتان مفتوحتان A ,B بحيث ان $a \notin B , b \in B$ ، $b \notin A, a \in A$

مثال: لتكن $X = \{1,2,3,...\}$, مجموعة الأعداد الطبيعية و$A_n = \{ 1,2,..., n\}$ وليكن. $T =\{ A_n : n \in I\}\cup\{\phi, X \}$ تبولوجي على X. فان (X,T) فضاء تبولوجي من نوع فضاء $T_{1/2}$ وليس من نوع فضاء T_1. سنبين اولا ان الفضاء التبولوجي ليس من نوع فضاء T_1. ليكن m,n عنصرين مختلفين من عناصر X. فان $n < m$ او $m< n$. لو فرضنا ان $m < n$ فان أي مجموعة مفتوحة تحتوي على n لابد وان تحتوي على m وبذلك فان الفضاء التبولوجي ليس من نوع فضاء T_1. من ناحية أخرى نفرض ان n عنصر من عناصر المجموعة X فان مجموعة انغلاق المجموعة $\{n\}$ هي المجموعة $\{n ,n+1 ,n+2,...\}$ أي ان $\{n\} =X - A_{n-1}$ ومن هذا ينتج ان $X - A_n =\{n+1,n+2,...\}=\{n\}'$. هذا يعني ان المجموعة المشتقة للمجموعة $\{n\}$ مجموعة مغلقة من الفضاء التبولوجي (X ,T) و بذلك فان الفضاء التبولوجي من نوع فضاء $T_{1/2}$.

المبرهنة التالية تبين ان أي فضاء تبولوجي من نوع فضاء T_1 هو أيضا من نوع فضاء$T_{1/2}$.

مبرهنة 16.1.4 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا من نوع فضاء T_1 فانه أيضا من نوع فضاء . $T_{1/2}$

البرهان : لتكن a, b نقطتين مختلفتين من نقاط X. اذن توجد مجموعة جزئية مفتوحة B من X بحيث ان b تنتمي الى B و a لا تنتمي الى B. هذا يؤدي الى ان$(B-\{b\})\cap\{a\}=\phi$ أي ان b ليست نقطة تراكم للمجموعة $\{a\}$. بما ان b أخذت عشوائيا من نقاط X. هذا يعني انه لا توجد أي نقطة تنتمي الى المجموعة المشتقة الى $\{a\}$. اذن $\{a\}'=\phi$. هذا يؤدي الى ان الفضاء التبولوجي من نوع فضاء $T_{1/2}$. #

مبرهنة 17.1.4: ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا. فان (X ,T) هو من نوع فضاء T_1 اذا و فقط اذا كان لكل نقطة a تنتمي الى X , $\{a\}'=\phi$.

البرهان : الاتجاه الأول ينتج مباشرة باستخدام المبرهنة (10.1.4). اما الاتجاه الثاني فنفرض ان a و b نقطتان مختلفتان من نقاط X. بما ان $\overline{\{a\}}=\{a\}\cup\{a\}'$ وان $\{a\}'=\phi$ اذن $\overline{\{a\}}=\{a\}$. هذا يعني ان$\{a\}$مجموعة مغلقة وبالتالي فان $X-\{a\}$ مجموعة مفتوحة تحتوي على b ولا تحتوي على a. وبنفس الطريقة يمكن البرهنة على ان المجموعة$X-\{b\}$ مجموعة مفتوحة تحتوي على a ولا تحتوي على b. هذا يبين ان الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_1. #

مبرهنة 18.1.4: لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X ,T). فان (X ,T) فضاء تبولوجي من نوع فضاء T_1 اذا وفقط اذا كان A تساوي تقاطع جميع المجموعات المفتوحة الحاوية عليها .

البرهان: اولا ليكن (X ,T) فضاء تبولوجي من نوع فضاء T_1 ولتكن A مجموعة جزئية من X. واضح ان A مجموعة جزئية من $\bigcap_{i\in I} B_i$ حيث ان (لكل$i\in I$) B_i مجموعة مفتوحة تحتوي على المجموعة A. الآن نبرهن ان $\bigcap_{i\in I} B_i$ مجموعة جزئية من A. نفرض ان $b\notin A$ و $a\in A$.

توجد مجموعة مفتوحة D_a من X تحتوي على النقطة a ولا تحتوي على النقطة b. لتكن D تساوي اتحاد جميع المجموعات من نوع D_a. واضح ان b لا تنتمي الى D وان D مجموعة مفتوحة تحتوي على a. اذن b لا تنتمي الى المجموعة $\bigcap_{i\in I} B_i$ وهذا هو المطلوب الأول .

العكس لتكن b , a نقطتين مختلفتين من نقاط X ولتكن A مجموعة ما تحتوي على العنصر a ولا تحتوي على العنصر b. فان A تساوي تقاطع جميع المجموعات المفتوحة

الحاوية على A. هذا يؤدي الى وجود مجموعة مفتوحة G تحتوي على a ولا تحتوي على b. بنفس الطريقة يمكننا ايجاد مجموعة مفتوحة Hتحتوي على b ولا تحتوي على a. بالتالي فان الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_1. #

مبرهنة 19.1.4 : ليكن (X ,T) فضاءا توبولوجيا من نوع فضاء T_1 فانه :

1- لكل A مجموعة جزئية منتهية من X وكل b نقطة لا تنتمي الى A. توجد مجموعة مفتوحة B تحتوي على b وان $A \cap B = \emptyset$.

2- لكل B مجموعة جزئية من X تكون b نقطة تراكم للمجموعة B اذا وفقط اذا كان كل مجموعة مفتوحة D تحتوي على النقطة b فان $B \cap D$ مجموعة غير منتهية .

البرهان : 1- لتكن $A=\{a_1 , a_2 , ..., a_n\}$ مجموعة منتهية جزئية من X ولتكن b نقطة ما لا تنتمي الى A . فان $a_i \neq b$ لكل $i = 1 , 2, ..., n$. بما ان الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_1 هذا يؤدي الى وجود مجموعة مفتوحة E_i تحتوي على b ولا تحتوي على a_i. نأخذ تقاطع جميع المجموعات المفتوحة من نوع E_i ولنرمز لها بالرمز E . واضح ان $E \cap A = \emptyset$.

2- لتكن D مجموعة مفتوحة تحتوي على العنصر b. ولنفرض ان $D \cap B$ مجموعة منتهية حسب القسم الاول من المبرهنة اعلاه نحصل على مجموعة مفتوحة E تحتوي على العنصر b ولا تتقاطع مع المجموعة $B - \{a\}$. هذا يعني ان b ليست نقطة تراكم للمجموعة B(تناقض) وبالتالي فان $B \cap D$ مجموعة غير منتهية . بالعكس بما ان لكل مجموعة مفتوحة D تحتوي على b تتقاطع مع B بعدد غير منته من النقاط أي ان $B \cap D$ تحتوي على نقطة تختلف عنb . هذا يؤدي الى ان b نقطة تراكم للمجموعة B. #

سنتطرق الآن الى نتائج مشابهة لما ذكرت في الفضاءات التبولوجية من نوع فضاءات T_0.

مبرهنة 4 . 1 . 20 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا ولنفرض أن لكل نقطة a من نقاط X توجد مجموعة مغلقة F تحتوي على a بحيث ان (F , T_F) فضاء جزئي من نوع فضاء T_1 فان (X , T) من نوع فضاء T_1 ايضا .

البرهان : لتكن a , b نقطتين مختلفتين من نقاط X. لتكن F مجموعة مغلقة تحتوي على النقطة a . و بذلك يوجد احتمالان الاول اذا كانت b محتواة في F فهذا يعني وجود مجموعتين

مفتوحتين A , B بحيث ان A تحتوي على a ولا تحتوي على b والمجموعة B تحتوي على b ولا تحتوي على a وهذا يؤدي الى الغرض المطلوب لأن المجموعتين A , B مفتوحتان في X ايضا .

الاحتمال الثاني ان النقطة b لا تنتمي الى المجموعة المغلقة F . اذن توجد مجموعة مغلقة M بحيث انها تحتوي على b ولا تحتوي على a . واضح ان $X - M$ مجموعة مفتوحة من X تحتوي على النقطة a ولا تحتوي على النقطة b. اذن (X ,T) فضاء تبولوجي من نوع فضاء T_1. #

مبرهنة 4 . 1 .21 : يكون الفضاء التبولوجي (X , T) من نوع فضاء T_1 اذا وفقط اذا وجد لكل نقطتين مختلفتين a ، b من نقاط X اقتران f مستمر من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى فضاء تبولوجي آخر من نوع فضاء T_1 بحيث ان $f(b) \neq f(a)$.

البرهان : نفرض اولا ان الفضاء التبولوجي (X ,T) من نوع فضاء T_1. نأخذ الفضاء الأخر هو نفس الفضاء (X ,T) فان الاقتران الذاتي يؤدي الى الغرض المطلوب . بالعكس نفرض ان a , b نقطتان مختلفتان من نقاط X اذن توجد مجموعتان مفتوحتان A , B بحيث ان A تحتوي على النقطة $f(a)$ ولا تحتوي على النقطة $f(b)$ و B تحتوي على النقطة $f(b)$ ولا تحتوي على النقطة $f(a)$. واضح ان $f^{-1}(A)$ تحتوي على a ولا تحتوي على b وان $f^{-1}(B)$ تحتوي على b ولا تحتوي على a . بما ان f اقتران مستمر فان $f^{-1}(A) , f^{-1}(B)$ مجموعتان مفتوحتان جزئيتان من X. هذا يؤدي الى ان (X ,T) فضاء تبولوجي من نوع فضاء T_1. #

نتيجة 1.4. 22 : ان صفة كون الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_1 صفة تبولوجية .

البرهان : يمكن استنتاجه مباشرة باستخدام المبرهنة (21.1.4). #

مبرهنة 1.4. 23 : ان صفة كون الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_1 صفة وراثية .

البرهان : يمكن استخدام نفس الطريقة المذكورة في برهان المبرهنة (1.4. 14) للحصول على النتيجة المطلوبة . #

4: 2 : فضاءات : T_2– T_3– T_4

في هذا الجزء من هذا الفصل سوف نستمر باستعراض فضاءات مماثلة للفضاءات التي ذكرناها في الجزء السابق وبهذا سوف يكون هذا الجزء مكملا للجزء الاول .

تعريف 4 .2 .1 : يسمى الفضاء التبولوجي (X ,T) بفضاء T_2 - أو هاوسدورف (Hausdorff) اذا وفقط اذا وجد لكل نقطتين مختلفتين a ,b من نقاط X مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتين A , B جزئيتين من X بحيث ان $a \in A , b \in B$.

من التعريف اعلاه يمكن ان نستنتج مباشرة ان الفضاءات التبولوجية من نوع فضاءات T_2محتواة في الفضاءات التبولوجية من نوع فضاءات T_1 لكن العكس غير صحيح كما موضح في المثال ادناه :

مثال : لتكن Z مجموعة الأعداد الصحيحة و T التبولوجيا المعرفة بالشكل التالي على Z:

$T = \{ A\subseteq Z : Z - A$ مجموعة منتهية$\}\cup\{ \emptyset\}$.

يلاحظ ان الفضاء التبولوجي (Z , T) هو من نوع فضاء T_1 (لأن لكل عنصرين مختلفين m , n من عناصر Z فان $n < m$ او $m < n$. نفرض ان $n < m$ فان المجموعة $\{...,n-1,n\}\cup\{m+1,...\}$مجموعة مفتوحة من Z تحتوي على n ولا تحتوي على m. كذلك المجموعة $\{...,n-1\}\cup\{m,m+1, ...\}$ مفتوحة من Z تحتوي على m ولا تحتوي على n . من جهة اخرى فان الفضاء التبولوجي (Z ,T) ليس من نوع فضاء T_2والسبب في ذلك لأن كل مجموعتين مفتوحتين من Z يجب ان تتقاطع بمجموعة غير منتهية .

مبرهنة 4. 2 . 2 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا فان (X , T) من نوع فضاء T_2 اذا وفقط اذا كان لكل نقطة a تنتمي الى X فان المجموعة $\{ \overline{a} \}$ تساوي تقاطع جميع المجاورات المغلقة الحاوية عليها .

البرهان : لتكن a نقطة ما من نقاط X ولتكن F تساوي تقاطع جميع الجوارات المغلقة من X الحاوية على النقطة a. واضح ان $\overline{\{a\}}$ مجموعة جزئية من F. نفرض جدلا وجود نقطة b تنتمي الى F تختلف عن a. اذن توجد مجموعة مفتوحة B تحتوي على النقطة bولا تحتوي على a (لأن الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_2) وهذا يعني وجود جوار مغلق يحتوي على

a ولا يحتوي على b و هذا خلاف الفرض . اذن $F = \overline{\{a\}}$. بالعكس نفرض ان a , b نقطتان مختلفتان من نقاط X. بما ان $\{a\} = \{ A : A \subseteq N(a) \}$ حيث $N(a)$ مجاور مفتوح يحتوي على النقطة a. هذا يعني وجود جوار مغلق A للنقطة a بحيث ان $b \notin A$ وهذا يؤدي الى وجود مجموعة مفتوحة B بحيث ان $a \in B \subseteq \overline{B} \subseteq A$. هذا يعني ان $a \in B$ و $b \notin B$

واضح ان متممة $\overline{B}$ تحتوي على b ولا تحتوي على a وهي مجموعة مفتوحة جزئية من X. كذلك تقاطع $\overline{B}$ مع $X - B$ يساوي المجموعة الخالية . اذن الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_2. #

مبرهنة 3.2.4 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا من نوع فضاء T_2 ولتكن $a_1 ,a_2,..., a_n$ نقاط مختلفة من X. فان توجد n من المجموعات المفتوحة غير المتقاطعة $A_1, A_2, ..., A_n$ وان $a_i \in A_i$ لكل $i -1 , 2, ..., n$.

البرهان : سوف نستخدم الاستقراء الرياضي في البرهان . اذا كانت $n= 2$ فمن تعريف فضاء T_2 تكون المبرهنة صحيحة . نفرض ان المبرهنة صحيحة الى $(n-1)$ من النقاط . أي ان لكل $i = 1 , 2, ..., n-1$ توجد مجموعة مفتوحة A_i تحتوي على النقطة a_i وان جميع هذه المجموعات غير متقاطعة . نبرهن الآن الى n من النقاط . لكل نقطة, a_i $i = 1,2,... , n-1$ مع النقطة a_n توجد مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتين H_i , G_i بحيث ان

$$a_i \in H_i , a_n \in G_i.$$

نفرض ان $K_i = A_i \cap H_i$ لكل $i = 1,2,... , n-1$ وان $B = \bigcap_{i=I} G_i$. فان B مجموعة مفتوحة لا تتقاطع مع أي مجموعة من مجموعات K_i لكل $i=1,2,...,n-1$. واضح ان $a_n \in B$ وبهذا ينتهي البرهان . #

مبرهنة 4 . 2 . 4 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا فانه يكون من نوع فضاء T_2 اذا وفقط اذا كانت المجموعة $F = \{(a,a) : a \in X\}$ مغلقة في فضاء الجداء $X \times X$.

البرهان : نفرض ان الفضاء التبولوجي (X , T) من نوع فضاء T_2. ولتكن (a,b) نقطة ما لا تنتمي الى المجموعة F أي $a \neq b$ وهذا يؤدي الى وجود مجموعتين مفتوحتين A , B

بحيث ان $A \cap B = \emptyset$ و ان $a \in A , b \in B$. نأخذ المجموعة المفتوحة $A x B$ من فضاء الجداء XxX. واضح ان المجموعة AxB لا تتقاطع مع المجموعة F. بما ان المجموعة AxB يمكن اعتبارها متممة المجموعة F لأنها تحتوي على جميع النقاط (a,b) بحيث $a \neq b$. هذا يعني ان F مجموعة مغلقة من فضاء الجداء . بالعكس لتكن a,b نقطتين مختلفتين من نقاط X. واضح ان النقطة (a,b) لا تنتمي الى المجموعة F. هذا يعني ان متممة F في فضاء الجداء هي مجموعة مفتوحة تحتوي على النقطة (a,b). هذا يؤدي الى وجود مجموعة مفتوحة من قاعدة تبولوجيا الجداء بحيث ان $C(F)$ $(a,b) \in A \times B$. من هذا ينتج ان $a\in A$ و $b\in B$ وان $(AxB) \cap F = \emptyset$ وبالتالي فان $A \cap B = \emptyset$. اذن الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_2. #

مبرهنة 2.4 . 5: ليكن f , g اقترانيين مستمرين من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S). فان الاقتران $h : X \longrightarrow YxY$ المعرف بالشكل التالي :

لكل $a \in X$ فان $h (a) = (f (a) , g(a))$ مستمر أيضا.

البرهان : باستخدام المبرهنتين (6.3 .5) , (6.6.3) وملاحظة استمرارية الاقترانيين $f = P_1 oh , g = P_2 oh,$ يمكن بسهولة برهان أن h اقتران مستمر . #

مبرهنة 6.2.4 : ليكن f , g اقترانيين مستمرين من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S) بحيث ان الفضاء التبولوجي (Y, S) من نوع فضاء T_2 فان المجموعة

$A = \{ a \in X : f (a) = g(a)\}$ مغلقة في X.

البرهان : نعرف الاقتران $h : X \longrightarrow Y \times Y$ كما في المبرهنة (4 .2 .5) فان h اقتران مستمر . نأخذ المجموعة $F = \{(b,b) : b \in Y\}$ المغلقة من فضاء الجداء $Y \times Y$. واضح ان $h^{-1} (F)$ مجموعة مغلقة من X وتساوي المجموعة A. #

نتيجة 7.2.4 : ليكن f , g اقترانيين مستمرين من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S). وليكن (Y , S) من نوع فضاء T_2 فان $f = g$ اذا كانت $f(a) = g(a)$ لكل $a\in A$ حيث A مجموعة كثيفة من X.

البرهان : يمكن استنتاجه مباشرة من المبرهنة (6. 2.4) ويترك كتمرين للقارىء . #

مبرهنة 2.4 . 8 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا ولنفرض ان لكل نقطة a من نقاط X توجد مجموعة مغلقة F تحتوي على a بحيث ان (F ,T_F) فضاء جزئي من نوع فضاء T_2. فان الفضاء التبولوجي (X , T) من نوع فضاء T_2.

البرهان : لتكن a نقطة ما في X. اذن توجد مجموعة مغلقة F تحتوي على a . بما ان (F,T_F) فضاء جزئي من نوع فضاء T_2. هذا يعني ان $\{\overline{a}\}$ تساوي تقاطع جميع الجوارات المغلقة من F الحاوية على النقطة a (حسب المبرهنة (2.4. 2)) . وبما ان الجوارات المغلقة للنقطة a الموجودة في F هي جوارات مغلقة للنقطة a في X. فبتطبيق المبرهنة (2.2.4) مرة اخرى فنحصل على ان الفضاء التبولوجي (X, T) من نوع فضاء T_2. #

مبرهنة 9.2.4 : يكون الفضاء التبولوجي (X , T) من نوع فضاء T_2 اذا وفقط اذا وجد لكل نقطتين مختلفتين a,b من نقاط X اقتران f مستمر من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى فضاء تبولوجي آخر من نوع فضاء T_2 بحيث ان $f(a) \neq f(b)$.

البرهان : بسيط ومشابه لما ورد في برهان المبرهنة (4.1. 21). #

نتيجة 4. 2 . 10 : ان صفة كون الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_2 صفة تبولوجية .

البرهان : ينتج مباشرة من المبرهنة (4 . 2 . 9) ويترك كتمرين . #

مبرهنة 11.2.4 : ان صفة كون الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_2صفة وراثية .

البرهان : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا من نوع فضاء T_2ولتكن Y مجموعة جزئية من X فان اقتران الأحتواء $i : (Y , T_Y) \longrightarrow (X, T)$ يكون متباين ومستمر وبذلك يكون الفضاء الجزئي من نوع فضاء T_2 (حسب المبرهنة (9.2.4)) . #

ملاحظة : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا من نوع فضاء T_iحيث $i = 0,1,2$. ليس من الضروري ان يكون فضاء القسمة من نوع فضاء T_i.

مثال : ليكن (R ,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي و Q علاقة على R معرفة بالصيغة التالية:

لكل عنصرين a , b ينتميان الى R فان $Q = \{ (a,b) \in R \times R : a- b$ عدد نسبي$\}$.

واضح ان Q علاقة تكافؤ على R . كذلك واضح ان فضاء القسمة $(R/Q , T/Q)$ ليس من

نوع فضاء T_0 وهذا يعني انه ليس من نوع فضاء T_1 ولا من نوع فضاء T_2والسبب يعود الى ان التبولوجيا المتكونة على R/Q هي التبولوجيا الضعيفة بينما الفضاء التبولوجي الحقيقي من نوع فضاء T_2.

مبرهنة 12.2.4 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا و R علاقة تكافؤ على X فانه :

1- اذا كان فضاء القسمة من نوع فضاء T_2 فان المجموعة

$E = \{ (a,b) \in X \times X : (a,b) \in R\}$ تكون مغلقة في فضاء الجداء $X \times X$.

2- اذا كانت المجموعة E الجزئية من فضاء الجداء $X \times X$مغلقة والاقتران القانوني

$q : X \longrightarrow X /R$ مفتوحا فان فضاء القسمة من نوع فضاء T_2.

البرهان : 1- واضح ان الاقتران $(q,q) : X \times X \longrightarrow X/R \times X /R$ مستمر وان المجموعة $F=\{(a,a) :a \in X\}$ مغلقة في فضاء الجداء $X /R \times X /R$ (انظر المبرهنة (4.2.4)) . هذا يؤدي الى ان المجموعة $(q , q)^{-1} (F) = e$ مغلقة في الفضاء التوبولوجي $X \times X$.

2- لتكن $q(a) , q(b)$ نقطتين مختلفتين في الفضاء التبولوجي $X/R \times X/R$. هذا يعني ان $(a,b) \in E$او ان $(X \times X) - E$ مجموعة مفتوحة تحتوي على النقطة (a,b) من فضاء الجداء $X(X$. وهذا يؤدي الى وجود مجموعة مفتوحة $A \times B$ من قاعدة تبولوجيا الجداء بحيث ان $A \times B \subseteq (X \times X) -E$ وان (a,b) تنتمي الى المجموعة $A \times B$. واضح ان q(A) لا تتقاطع مع q(B). وبما ان الاقتران مفتوح فهذا يؤدي الى ان المجموعتين q(A) , q(B) مفتوحتان تحتوي احدهما على q(a) والثانية على q(b). #

تعريف 13.2.4 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا . يسمى (X , T) بفضاء T_3 اذا حقق الفضاء الشرطين التاليين :

1- لكل مجموعة مغلقة F ونقطة a لا تنتمي الى F توجد مجموعتان مفتوحتان A , B غير متقاطعتين احدهما تحتوي على المجموعة F والأخرى تحتوي على النقطة a.

2 - يكون من نوع فضاء T_1.

ملاحظة : يسمى الفضاء التبولوجي (X , T) فضاءا منتظما (Regular space) اذا حقق الشرط الاول من التعريف اعلاه .

مبرهنة 14.2.4 : ليكن (X,T) فضاءاً تبولوجيا من نوع فضاء T_3 فانه من نوع فضاء T_2.

البرهان : لتكن a , b نقطتين مختلفتين من نقاط X. بما ان الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_3. اذن توجد مجموعة مفتوحة D تحتوي على احدى النقطتين ولتكن a (لأن الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_1) ولا تحتوي على النقطة الأخرى b. هذا يؤدي الى ان $F = X - D$ مجموعة مغلقة تحتوي على b ولا تحتوي على a. باستخدام الشرط الاول من تعريف فضاء T_3 نحصل على مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين A , B بحيث ان $a \in A , b \in F \subseteq B$. هذا يعني ان الفضاء التبولوجي من نوع فضاء T_2. #

من المبرهنة اعلاه نستنتج ان الفضاءات التبولوجية من نوع فضاءات T_2 تحتوي على الفضاءات التبولوجية من نوع فضاءات T_3. لكن العكس غير صحيح كما في المثال التالي :

مثال : ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي ولتكن $D= \{ 1 / n : n = 1,2,3, ...\}$ مجموعة جزئية من R. سوف نعرف تبولوجيا جديدة على R بالاستفادة من التبولوجيا الاعتيادية T والمجموعة D بالشكل التالي : نأخذ اسرة جميع المجموعات الجزئية وهي $S = \{ B : B = A - G\}$ حيث A مجموعة مفتوحة جزئية من R و G مجموعة جزئية من D. بسهولة يمكن البرهنة على ان S يشكل تبولوجي على R. سنوضح ادناه ان الفضاء التبولوجي (R ,S) من نوع فضاء T_2 ولكنه ليس من نوع فضاء T_3.

لتكن a , b نقطتين مختلفتين من نقاط R اذن لدينا $a < b$ او $b < a$. لنفرض ان $a < b$ نأخذ النقطة c بين النقطتين a , b. واضح ان الفترة (c ,∞) تحتوي على النقطة b ولا تحتوي على النقطة a والفترة $(-\infty ,c)$ تحتوي على النقطة a ولا تحتوي على النقطة b. اكثر من ذلك ان هاتين الفترتين غير متقاطعتين وهما عنصران من عناصر S. هذا يعني ان (R , S) من نوع فضاء T_2. الآن سنبرهن ان هذا الفضاء لا يحقق الشرط الاول من فضاء T_3. بما ان المجموعة D مجموعة مغلقة بالنسبة الى الفضاء التبولوجي (R , S) ونقطة الصفر لا تنتمي الى D. ولكن لا يمكن ايجاد مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين B_1, B_2 بحيث ان $0 \in B_2 , D \subseteq B_1$ السبب في ذلك يعود الى :

لنفرض ان المجموعة B_1 مفتوحة تحتوي على D في الفضاء التبولوجي (R , S). هذا يعني ان B_1 مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي الحقيقي (R , T) وبالتالي يؤدي هذا الى

ان B_1 تحتوي على فترة مفتوحة تحتوي على عنصر من نوع $1/n$. أي ان كل مجموعة مفتوحة تحتوي على نقطة الصفر في الفضاء التبولوجي (R , S) يجب ان تحتوي على فترة مفتوحة تحتوي على عنصر من نوع $1/n$. هذا يؤدي الى ان B_1 تتقاطع مع B_2 وبالتالي فان الفضاء التبولوجي (R , S) ليس من نوع فضاء T_3.

مبرهنة 15.2.4: ان صفة كون الفضاء التبولوجي (X , T) من نوع فضاء T_3 صفة وراثية.
البرهان : ليكن (Y, T_Y) فضاءا تبولوجيا جزئيا من الفضاء التبولوجي (X ,T). ولتكن F مجموعة مغلقة من Y و a نقطة ما من نقاط Y لا تنتمي الى F. بما ان F مجموعة مغلقة فان $\overline{F}x \cap Y = \overline{F}, F = \overline{F}$ (بالاعتماد على المبرهنة (2 . 5 . 9)) . بذلك فان a لا تنتمي الى المجموعة المغلقة $\overline{F}_X$ من الفضاء التبولوجي الكلي (X ,T). لكن (X , T) فضاء تبولوجي من نوع فضاء T_3. هذا يؤدي الى وجود مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين A , B وجزئيتين من X بحيث ان $a \in B , \overline{F}_x \subseteq A$. وبالتالي فان المجموعتين $A\cap Y , B\cap Y$ مفتوحتان وغير متقاطعتين من Y وان $A \cap Y$ تحتوي على F و $B \cap Y$ تحتوي على النقطة a. بالاستناد الى المبرهنة (14.1.4) نستنتج ان الفضاء التبولوجي الجزئي (Y , T_Y) من نوع فضاء T_3.
#

سنبين في المثال التالي ان فضاء القسمة لفضاء تبولوجي من نوع فضاء T_3 ليس بالضرورة من نوع فضاء T_3 (كذلك ورد مثل هذا الاستنتاج في المثال الموجود على صفحة 126).

مثال : ليكن (R ,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي ولنفرض ان Q تجزئة للمجموعة R بحيث ان

$$Q = \{ A = [1 , 2] , B = [4 , 5] , D = R - (A \cup B) \}$$

فان فضاء القسمة $(R/Q , T/Q)$ يحتوي على ثلاث عناصر هي A , B , D ومجموعاته المفتوحة هي $\{ R / Q , \phi , \{D\} , \{D ,A\} , \{D,A\} , \{D,B\}\}$ يلاحظ ان الفضاء التبولوجي $(R/Q , T/Q)$ ليس من نوع فضاء T_3. وذلك لعدم وجود مجموعة مفتوحة تحتوي على المجموعة المغلقة

$$A\cup B = R /Q - D$$

تعريف 2.4. 16 : يسمى الفضاء التبولوجي (X ,T) فضاءا منتظما تماما (Completely regular) اذا وفقط اذا وجد لكل مجموعة مغلقة F غيرخالية من X ولكل نقطة a في X لا تنتمي الى F اقتران مستمر $f : X \longrightarrow [0 ,1]$ بحيث ان $f(a) = 0$, $f(F) = 1$ حيث [1,0] فترة مغلقة في مجموعة الأعداد الحقيقية .

مبرهنة 2.4. 17 : اذا كان الفضاء التبولوجي (X , T) فضاءا منتظما تماما فانه فضاء منتظم .

البرهان : نفرض ان F مجموعة مغلقة من X و a نقطة ما لا تنتمي الى F. هذا يؤدي الى وجود اقتران مستمر $f :X \longrightarrow [0 ,1]$ بحيث ان $f(a) = 0$, $f(F) = 1$, . نأخذ المجموعتين $U = [0 ,1/2)$, $V = (1/2,1]$ الجزئيتين من $[0 ,1]$. واضح ان U , V مفتوحتان في $[0 , 1]$ وغير متقاطعتين . لتكن $H = f^{-1}(U)$, $G = f^{-1}(V)$ فان H , G مجموعتين مفتوحتان في X وغير متقاطعتين وبسهولة نجد ان $a \in H , F \subseteq G$ هذا يعني ان (X ,T) فضاء منتظم . #

تعريف 18.2.4 : يسمى الفضاء التبولوجي (X , T) فضاءا عاديا اذا وفقط اذا وجد لكل مجموعتين مغلقتين غير متقاطعتين F , E جزئيتين من X مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتين A ,B من X بحيث ان $F \subseteq A , E \subseteq B$.

مبرهنة 19.2.4 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا فان (X , T) فضاءا عاديا اذا وفقط اذا وجد لكل مجموعة مغلقة F من X ولكل مجموعة مفتوحة A من X تحتوي على F مجموعة مفتوحة B تحتوي على F وان $F \subseteq B \subseteq \bar{B} \subseteq A$.

البرهان : لتكن F مجموعة مغلقة من X و A مجموعة مفتوحة تحتوي على F. فان $C(A) = X - A$ مجموعة مغلقة من X لا تتقاطع مع المجموعة F. بما ان الفضاء التبولوجي (X ,T) فضاءا عاديا ، هذا يستلزم وجود مجموعتين مفتوحتين B, D غير متقاطعتين بحيث ان $F \subseteq B$, $X - A = C (A) \subseteq D$. يؤدي هذا الى ان $B \subseteq C (D) = X D \subseteq A$. بما ان $C(D) = X - D$ مجموعة مغلقة فينتج ان $F \subseteq B \subseteq \bar{B} \subseteq C (D) = X, D \subseteq A$.
وبالعكس لتكن F , E مجموعتين مغلقتين غير متقاطعتين جزئيتين من X فان $A = C(E)$ مجموعة مفتوحة تحتوي على F ومن الفرض نحصل على مجموعة مثل B بحيث ان

$F \subseteq B \subseteq \overline{B} \subseteq C(E)$. ان المجموعتين B , $C(\overline{B})$ مفتوحتـان وغير متقاطعتـين كذلك $F \subseteq B, E \subseteq C(\overline{B})$. هذا يعني ان الفضاء التبولوجي (X, T) فضاءا عاديا . #

مثال 1: لتكن X مجموعة ما تحتوي على اكثر من عنصر و T التبولوجيا الضعيفة على X فان الفضاء التبولوجي (X, T) فضاءا عاديا . وذلك لعدم وجود مجموعتين (غير خاليتين) مغلقتين متقاطعتين فيه . لكنه ليس من نوع T_0ولا من نوع T_1 ولا T_2 ولا T_3.

مثال 2 : لتكن $X=\{u,v,w,z\}$ ولتكن T اسرة المجموعات الجزئية الآتية :

$T = \{\phi,\{u\},\{u,v\},\{u,v,w\},X\}$. واضح ان T تبولوجي على X وان مجموعاته المغلقة هي $\{\phi,\{z\},\{w,z\},\{v,w,z\},X\}$. يلاحظ كذلك أن المجموعات المغلقة (الغير خالية) متقاطعة بالنقطة z وهذا يعني ان الفضاء التبولوجي (X, T) فضاءاً عادياً . لتكن $Y=\{u,v,w\}$ مجموعة جزئية من X فان الفضاء الجزئي (Y, T_Y) يحتوي على المجموعات المفتوحة التالية $\{\phi,\{u\},\{u,v\},\{u,w\},Y\}$. اما مجموعاته المغلقة فهي $\{\phi,\{v\},\{w\},\{v,w\},Y\}$. واضح ان المجموعتين $\{w\}$, $\{v\}$مغلقتان وغير متقاطعتين في الفضاء التبولوجي الجزئي (Y, T_Y). من جهة اخرى ان هاتين المجموعتين غير محتويتين في مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين من الفضاء نفسه وبالتالي فان الفضاء التبولوجي (Y, T_Y) ليس فضاءا عاديا . لكن عند اضافة شرط آخر على أي مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي عادي نحصل على فضاء تبولوجي جزئي عادي . قبل ذكر المبرهنة التي تعطينا هذا التفسير يمكن القول ان صفة الفضاء العادي ليست صفة وراثية كما هو ملاحظ في المثال اعلاه .

مبرهنة 2.4. 20 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا عاديا و Yمجموعة مغلقة جزئية منX فان الفضاء التبولوجي الجزئي (Y, T_Y) يكون فضاءا عاديا .

البرهان : لتكن F, E مجموعتين مغلقتين غير متقاطعتين جزئيتين من Y. بما انY مجموعة مغلقة فان F, E مغلقتين في الفضاء التبولوجي (X, T). هذا يؤدي الى وجود مجموعتين مفتوحتين A, B غير متقاطعتين جزئيتين من X بحيث ان $F \subseteq A, E \subseteq B$. يلاحظ ان المجموعتين $A \cap Y, B \cap Y$ مفتوحتان في الفضاء الجزئي (Y, T_Y) وتحويان F, E على التوالي وان $(A \cap Y) \cap (B \cap Y) = \phi$. هذا يعني ان (Y, T_Y) فضاء تبولوجي عادي . #

تعريف 2.4. 21 : ليكن(X,T) فضاءا تبولوجيا . يسمى هذا الفضاء بفضاء T_4 اذا وفقط اذا كان عاديا ومن نوع فضاء T_1 في نفس الوقت .

ملاحظات :

1) من المبرهنتين (2.4 . 20) ,(4.1. 20) يمكن القول بان الفضاء الجزئي (Y , T_Y) يكون من نوع فضاء T_4 اذا كان الفضاء التبولوجي الكلي (X , T) من نوع فضاء T_4وان المجموعة Yمغلقة في X.

2) من تعريف فضاءات T_4يمكن الاستنتاج بانها محتواة في فضاءات T_3.

تعريف 22.2.4: لتكن كل من A , B مجموعة جزئية من (X , T). تسمى المجموعتان A B منفصلتان اذا وفقط اذا كان $A\cap \bar{B}= \bar{A} \cap B = \phi$.

تعريف 4 . 2 . 23 : يسمى الفضاء التبولوجي (X , T) عاديا تماما (Completely normal) اذا وفقط اذا وجد لكل مجموعتين منفصلتين A, B منX مجموعتان مفتوحتان غبر متقاطعتين G , H من X وان $A \subseteq G , B \subseteq H$.

مبرهنة 2.4. 24 : اذا كان (X ,T) فضاءا عاديا تماما فان (X ,T) فضاء عادي .

البرهان : ينتج مباشرة باستخدام التعريف . #

مبرهنة 4 . 2 . 25 : ليكن(X ,T) فضاءا تبولوجيا فان (X ,T) فضاءا عاديا تماما اذا وفقط اذا لكل $Y \subseteq X$ فان (Y, T_Y) فضاء عادي .

البرهان : ليكن (X ,T) فضاءا عاديا تماما و X Yولتكن A , B مجموعتين مغلقتين غير متقاطعتين جزئيتين من Y. اولا نبرهن ان A , B منفصلتين في X. بما ان

$\bar{B}_x \cap Y = \bar{B}y = B$ هذا يؤدي الى ان

$A\cap \bar{B}x = (A \cap Y) \cap \bar{B}x =A \cap (Y \cap \bar{B}_x) =A \cap B = \phi$.

وبنفس الطريقة يمكن البرهنة على ان $B\cap \bar{A}_x = \phi$. وبهذا نحصل على ان المجموعتين A , B منفصلتان في X. باستخدام تعريف العادي تماما نحصل على مجموعتين G , H مفتوحتين غير متقاطعتين في X وان $A\subseteq G,\ B\subseteq H$. وبالتالي فان$G \subseteq Y , H\subseteq Y$ مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين في Yوأن$A\subseteq G \cap Y , B\subseteq H \cap Y$. هذا يعني ان

(Y, T_Y) فضاء عادي . بالعكس لتكن A , B مجموعتين منفصلتين في الفضاء الكلي (X , T). هذا يعني ان

$Y = X - (\bar{A} \cap \bar{B})$ فضاء جزئي عادي . يلاحظ ان $F = Y \cap \bar{A} , E = Y \cap \bar{B}$

مجموعتان مغلقتان في Y وان

$$F \cap E = (Y \cap \bar{A}) \cap (Y \cap \bar{B}) = Y \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = \phi$$

هذا يؤدي الى ان F , E غير متقاطعتين . بما ان (Y ,T_Y) فضاء جزئي عادي. اذن توجد مجموعتان G , H مفتوحتان غير متقاطعتين في Yوان $A \subseteq F \subseteq G, B \subseteq E \subseteq H$. بما ان Yمجموعة مفتوحة في X فان G , H مفتوحتان في X. هذا يعني ان (X , T)فضاء عادي تماما . #

تعريف 2.4. 26: يسمى (X , T) فضاء تبولوجي من نوع فضاء T_5 اذا وفقط اذا كان فضاءا عاديا تماما وانه من نوع فضاء T_1.

ملاحظة : من تعريف الفضاءات من نوع فضاء T_4وفضاء T_5يمكن ان نستنتج ان الفضاءات من نوع فضاء T_5هي من نوع فضاء T_4. لكن العكس غير صحيح بالاستناد الى المبرهنة (25.2.4) .

3,4 قابلية العد الأولى والثانية

عرفت الفضاءات التبولوجية التي تتمتع بقابلية العد الأولى والثانية بشكلها الحالي عام 1914 من قبل العالم هاوسدورف . في هذا الجزء سوف نتناول هاتين الخاصيتين وبعض النتائج عليهما ولكن قبل اعطاء تعريف قابلية العد الأولى سنتناول التعريف التالي :

تعريف 1.3.4 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا . يقال أن (X , T) يمتلك قاعدة قابلة للعد عند النقطة x اذا وفقط اذا وجدت اسرة جوارات $\{N_i\}_{i \in I}$ قابلة للعد عند النقطة x بحيث ان لكل جوار N للنقطة x يحتوي على الأقل احد جوارات الأسرة .

يجدر الاشارة هنا ان الفضاء الذي يتمتع بالصفة الواردة في التعريف اعلاه تكون المتتاليات المتقاربة فيه ملائمة لتحديد ماهية النقاط الحدية للمجموعات الجزئية منه .

تعريف 2.3.4 : يقال بان الفضاء التبولوجي (X , T) متمتع بقابلية العد الأولى اذا وفقط اذا كان يمتلك قاعدة قابلة للعد عند كل نقطة من نقاطه .

مثال 1 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و T التبولوجيا القوية على X فان (X ,T) يتمتع بقابلية العد الأولى وذلك لأن لكل عنصر x من X فان الجوار $\{x\}$ينتمي الى أي قاعدة على Tوبهذا فان أي جوار للنقطة x يحتوي على الجوار $\{x\}$.

مثال 2 : ليكن (R , T) الفضاء التبولوجي الحقيقي فانه يتمتع بقابلية العد الأولى . السبب في ذلك هو لكل عنصر r ينتمي الى R فان اسرة الفترات المفتوحة

$N_n = \{ (r - 1/n , r + 1 / n) : n\in N\}$ تمثل قاعدة قابلة للعد على النقطة r.

مبرهنة 3 .3.4 : ان قابلية العد الأولى صفة وراثية .

البرهان : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا يتمتع بقابلية العد الأولى ولتكن Y مجموعة جزئية من X. نفرض y نقطة من نقاطY فان $y \in X$. هذا يؤدي الى وجود اسرة جوارات $\{N_i\}_{i\in I}$ قابلة للعد على النقطة yمن X وان أي جوار N للنقطة y يحتوي على الأقل احد جوارات الأسرة . واضح ان $M_i = N_i \cap Y$ اسرة جوارات للنقطة y منY قابلة للعد وان كل جوار M للنقطة yمنY فان$M = N \cap Y$ حيث N جوار على y من X. بما ان N يحتوي على الأقل احد جوارات $\{N_i\}_{i\in I}$ فان Mيحتوي على الأقل على أحد جوارات $\{M_i\}_{i\in I}$. هذا يعني ان (Y , T_Y) يتمتع بقابلية العد الأولى . #

مبرهنة 4.3.4 : ان كون صفة الفضاء التبولوجي متمتع بقابلية العد الاولى صفة تبولوجية.

البرهان : ليكن f اقتران تكافؤ تبولوجي من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S) وليكن (X ,T) متمتع بقابلية العد الاولى . الآن نبرهن على ان (Y, S) متمتع بقابلية العد الاولى ايضا . نفرض ان y نقطة ما من نقاط Y ، هذا يعني وجود نقطة واحدة $x\in X$ بحيث ان $f(x) = y$. لكن (X ,T) متمتع بقابلية العد الاولى فهذا يؤدي الى وجود قاعدة قابلة للعد على النقطة ولتكن $\{A_i\}_{i\in N}$. بما ان f اقتران تكافؤ تبولوجي فهو اقتران مفتوح أي ان $\{f(A_i)\}_{i\in N}$قاعدة قابلة للعد على النقطة yوبالتالي فان (Y,S) يتمتع بقابلية العد الاولى . #

مبرهنة 5.3.4 : ليكن كل من (X_1,T_1) , (X_2,T_2) فضاءا تبولوجيا فان فضاء الجداء (X,T) لهما يتمتع بقابلية العد الاولى اذا وفقط اذا (X_i , T_i) يتمتع بقابلية العد الاولى لكل $i=1,2$.

البرهان: اولا نفرض ان (X,T) يتمتع بقابلية العد الاولى ولتكن (x_1, x_2) نقطة ما من نقاط X فان $X_1 \times X_2$ فضاء جزئي من X وبهذا فانه يتمتع بقابلية العد الاولى (بالاستناد الى المبرهنة (3.3.4)) . من ناحية اخرى ان الفضاء X_1xX_2 متكافئ تبولوجيا مع الفضاء (X_1,T_1). هذا يؤدي الى ان (X_1, T_1)متمتع بقابلية العد الاولى بلاعتماد على المبرهنة (4.3.4). وبنفس الطريقة يمكن البرهنة على ان الفضاء التبولوجي (X_2, T_2) يتمتع بقابلية العد الاولى .

بالعكس نفرض ان كل من (X_1,T_1) , (X_2,T_2) يتمتع بقابلية العد الاولى ولتكن (x_1,x_2) نقطة ما من نقاط X. بما ان (X_1,T_1) يتمتع بقابلية العد الاولى فنحصل على قاعدة قابلة للعد على النقطة x_1 ولتكن $B_{x1}=\{U_i:i\in N\}$ وبنفس الطريقة نحصل على قاعدة قابلة للعد على النقطة x_2 ولتكن $B_{x_2}=\{Vj:j\in N\}$ نعرف الآن

$$B=B_{x1} \times B_{x2}=\{U_ixV_j:i,j\in N\}$$

سنبين ادناه ان B قاعدة قابلة للعد على النقطة (x_1,x_2) نفرض ان

$B=\bigcup_{n\in N} A_n$، حيث $A_n=\{UnxVm: n, m\in N\}$.

واضح ان $(x_1,x_2)\in U_nxV_m$ لكل $n,m\in N$. لتكن U مجموعة مفتوحة في Xتحتوي على النقطة(x_1,x_2) فهذا يعني وجود مجموعة مفتوحة GxH بحيث ان $(x_1,x_2)\in GxH\subseteq U$ حيث G مجموعة مفتوحة في X_1 تحتوي على x_1و H مجموعة مفتوحة في X_2تحتوي على x_2. هذا يؤدي الى وجود قاعدة قابلة للعد $U_n\in B_{x1}$و $V_m\in B_{x2}$بحيث ان $x_1\in U_n \subseteq G$،

$x_2\in V_m \subseteq H$ وبالتالي فان $(x_1,x_2)\in U_nxV_m \subseteq GxH$. هذا يبين ان B قاعدة قابلة للعد على النقطة (x_1,x_2) و بهذا فان (X,T) يتمتع بقابلية العد الاولى . #

مبرهنة 6.3.4: ليكن كل من (X_1,T_1) ,(X_2,T_2),..., (X_n,T_n) فضاءا تبولوجيا فان فضاء الجداء (X,T) لهذه الفضاءات يتمتع بقابلية العد الأولى اذا وفقط اذا كان(X_i,T_i) يتمتع بقابلية العد الأولى لكل $i=1,2, ... ,n$.

البرهان : يمكن استخدام الاستقراء الرياضي والاعتماد على المبرهنة (5.3.4) اعلاه . #

الأن ننتقل الى اعطاء خاصية ثانية للفضاءات التبولوجية والتي هي اقوى من الخاصية الأولى اعلاه كما سنبينه فيما يلي :

تعريف 7.3.4 : يقال بان الفضاء التبولوجي (X ,T) متمتع بقابلية العد الثانية اذا كان الفضاء يمتلك قاعدة قابلة للعد على التبولوجي المعرف عليه .

يلاحظ ان الفضاء التبولوجي المتمتع بقابلية العد الثانية يتمتع بقابلية العد الأولى وذلك لأن لأي نقطة x تنتمي الى الفضاء (X ,T) اذا كانتB قاعدة للنقطة x فانها قابلة للعد. لكن العكس غير صحيح حيث ان الفضاءات التبولوجية المتمتعة بقابلية العد الأولى ليست بالضرورة متمتعة بقابلية العد الثانية كما في الأمثلة الآتية :

مثال1 : لتكن X مجموعة غير قابلة للعد وT التبولوجيا القوية على X. يلاحظ ان (X ,T) متمتع بقابلية العد الأولى ولكن لا يتمتع بقابلية العد الثانية .

مثال2 : ليكن (R ,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي ولتكن $\{a,b\}$ اعداد نسبية $B =\{(a,b)\}$:
هذا يؤدي الى انB قاعدة الى T وانها قابلة للعد هذا يعني ان (R ,T) متمتع بقابلية العد الثانية .

مبرهنة 8.3.4 : ان صفة قابلية العد الثانية صفة وراثية .

البرهان: ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا متمتع بقابلية العد الثانية ولتكن Yمجموعة جزئية من X. نفرض ان $B =\{ B_i \}_{i\in I}$ قاعدة للفضاء التبولوجي (X ,T) قابلة للعد فان$A_i =B_i \cap Y$ مجموعات مفتوحة في الفضاء الجزئي (Y,T_Y) عددها قابل للعد . الآن نبين ان $\{A_i\}_{i\in I}$ قاعدة للفضاء الجزئي . نفرض ان H مجموعة مفتوحة فيY. هذا يعني وجود مجموعة مفتوحة G في X بحيث ان $H =G \cap Y$ لكن $H = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$. هذا يؤدي الى ان

$H = (\bigcup\limits_{i\in I} B_i) \cap Y = \bigcup\limits_{i\in I}(B_i \cap Y) =\bigcup\limits_{i\in I} A_i$. هذا يعني ان $\{A_i\}i(I$ قاعدة

في الفضاء التبولوجي الجزئي(Y,T_Y). #

مبرهنة 9.3.4: ان صفة قابلية العد الثانية صفة تبولوجية .

البرهان : ليكن $f : (X ,T) \longrightarrow (Y , S)$ اقتران تكافؤ تبولوجي و (X , T) يتمتع

بقابلية العد الثانية ، أي توجد له قاعدة قابلة للعد ولتكن $\{G_i\}_{i\in I}$. يلاحظ ان $\{f(G_i)\}_{i\in I}$ مجموعات مفتوحة عددها قابل للعد في (Y, S). الآن نبرهن ان $\{f(G_i)\}_{i\in I}$ قاعدة الى (Y,S).

نفرض ان H مجموعة مفتوحة في Y. هذا يعني ان $A = f^{-1}(H)$ مجموعة مفتوحة في X وبهذا فان $A = \cup G_i$ أي ان $H = \bigcup\limits_{i\in I} f(G_i)$. هذا يؤدي الى ان (Y , S) يحتوي على قاعدة قابلة للعد . #

مبرهنة 10.3.4 : لتكن (X_1, T_1) , (X_2 , T_2) ,...., (X_n , T_n) فضاءات تبولوجية تتمتع بقابلية العد الثانية فان فضاء الجداء (X ,T) يتمتع بقابلية العد الثانية .

البرهان : يكفي أن نبرهن بان فضاء الجداء لفضائيين تبولوجيين متمتعين بقابلية العد الثانية يتميع بقابلية العد الثانية ايضا ويمكن استخدام الاستقراء الرياضي لبرهان المبرهنة .

لتكن كل من B_2 , B_1 قاعدة للفضاء التبولوجي (X_2 , T_2) , (X_1 ,T_1) على التوالي ولتكن

$$B = \{ G = G_1 x G_2 : G_i \in B_i, i = 1, 2\}.$$

واضح ان B مجموعة قابلة للعد ، وباستخدام المبرهنة (3.6.3) نحصل على ان B قاعدة لفضاء الجداء . #

تعريف 11.3.4 : يسمى الفضاء التبولوجي (X ,T) فضاءا منفصلا (Separable space) اذا وفقط اذا وجدت مجموعة A جزئية من X قابلة للعد وكثيفة .

مبرهنة 12 .3.4 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا يتمتع بقابلية العد الثانية فانه فضاءا منفصلا .

البرهان : بما ان (X ,T) يتمتع بقابلية العد الثانية هذا يعني وجود قاعدة مثل $B = \{B_i : {}_{i\in I} \}$ قابلة للعد . نفرض ان $A = \{x_i \in B_i : i\in I)$ بحيث $A \cap B_i =\{x_i\}$. يلاحظ ان A مجموعة قابلة للعد. الآن نبرهن ان A مجموعة كثيفة في X. نفرض ان $x\in X$ فان $x\in A$ او $x \in X-A$. اذا كانت $x \in X-A$، يكفي ان نبرهن ان x نقطة تراكم الى A. لتكن U مجموعة مفتوحة تحتوي على x فان $U = \cup B_i$ وبالتالي فان $x \in \cup B_i$.بما ان $x \in A$.

هذا يؤدي الى ان U تتقاطع مع A. اذن x نقطة تراكم للمجموعة A. هذا يعني ان A مجموعة كثيفة في X. #

سنبين في المثال التالي بان الفضاء المنفصل ليس بالضرورة متمتعا بقابلية العد الثانية .

مثال : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا بحيث ان X مجموعة الأعداد الحقيقية وان T تبولوجيا المتممات المنتهية . واضح ان أي مجموعة جزئية من X وغير منتهية تكون كثيفة في X. هذا يعني ان (X,T) فضاءا منفصلا . الآن نبين ان (X,T) لا يتمتع بقابلية العد الثانية . نفرض العكس أي ان الفضاء متمتع بقابلية العد الثانية هذا يعني وجود قاعدة قابلة للعد B بالنسبة الى T. نفرض ان $x \in X$ فان $X - \{x\}$ مجموعة مفتوحة . الآن نعرف

$$B_x = \{B_i \in B : x \in B_i\}, U_x = \{U \in T : x \in U\}.$$

يلاحظ ان $\{x\} = \bigcap_{U \in U_x} U \supseteq \bigcap_{B_i \in B_x} B_i \ni \{x\}$. هذا يؤدي الى ان $\{x\} = \bigcap_{B_i \in B_x} B_i$.

بما ان B_i مجموعة مفتوحة فان $X - B_i$ مجموعة منتهية . هذا يؤدي الى ان

$\bigcup_{B_i \in B_x} (X - B_i) = X - \bigcap_{B_i \in B_x} B_i = X - \{x\}$. واضح ان $\bigcup_{B_i \in B_x} (X - B_i)$ مجموعة قابلة

للعد لانها جزئية من مجموعة قابلة للعد . أي ان $X - \{x\}$ مجموعة قابلة للعد (تناقض) . هذا يعني ان (X,T) لا يتمتع بقابلية العد الثانية .

4.4 الفضاءات المترية

سبق وان تطرقنا الى هذا الموضوع في الفصل الثاني ولكن لم نستعرض آنذاك الارتباط الوثيق بين هذه الفضاءات والفضاءات التبولوجية . لذا سنبين هنا ان كل فضاء متري هو فضاء تبولوجي ولكن العكس ليس صحيحا بصورة عامة . جدير بالذكر أننا سوف نقتصر على الجزء الأول من هذه العبارة .

في البداية نذكر تعريف الفضاء المتري كما ورد سابقا .

تعريف 1.4.4 : لتكن X مجموعة غير خالية و $d : X \times X \longrightarrow R$ اقتران المسافة فان الثنائي (X,d) يسمى بالفضاء المتري (Metric space).

مبرهنة 2.4.4 : ليكن (X,d) فضاءا متريا فان اسرة جميع الكرات المفتوحة B من X تكون قاعدة للتبولوجي T على المجموعة X.

البرهان : بالاعتماد على النتيجة (9.2.3) يكفي ان نبرهن ان Xيمكن كتابتها على شكل اتحاد لكرات مفتوحة وان تقاطع كل كرتين مفتوحتين هي المجموعة الخالية أو أي نقطة في التقاطع يمكن تكوين كرة مفتوحة تحتوي على النقطة وتقع كليا داخل التقاطع . بسهولة يمكن تحقيق الشرط الأول أي ان. $X=\cup\{B(x;r):x\in X,0<r\in R$. حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية . اما بالنسبة للشرط الثاني : لتكن $B_1(a_1;r_1)$,$B_2(a_2;r_2)$ كرتين مفتوحتين وليكنb عنصرا ما ينتمي الى تقاطع الكرتين B_1 ,B_2 فان

$d(b,a_1)=n_1<r_1$ و$d(b,a_2)=n_2<r_2$.

نفرض ان m تساوي العدد الأصغر من العدديين الموجبين r_2-n_2 , r_1-n_1 وبهذا فانB (b;m) كرة مفتوحة جزئية من تقاطع الكرتين B_1 ,B_2. هذا يؤدي الى ان B تشكل قاعدة للتبولوجي الوحيد T على المجموعة X. يسمى هذا التبولوجي بالتبولوجي المتكون بواسطة الاقتران d. #

مثال 1 : لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية وليكن $d:RxR \longrightarrow R$ اقتران المسافة المعرف بالقيمة المطلقة $d(x,y)=|x-y|$. فان اسرة الكرات المفتوحة في الفضاء المتري(R,d) تساوي اسرة الفترات المفتوحة وبذلك تكون التبولوجيا المتولدة بواسطة d هي التبولوجيا الاعتيادية .

مثال 2 : ليكن (X,d) فضاءا متريا بحيث ان اقتران المسافة d معرف بالشكل الأتي :

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & if\ x=y \\ 1 & if\ x\neq y \end{cases} .$$

فان التبولوجيا المتكونة بواسطة الاقتران d هي التبولوجيا القوية على المجموعة X. والسبب في ذلك لأن لكل عنصرx من عناصر المجموعةX يمكن أخذ الكرة المفتوحة $B(x;r)=\{x\}$ اذا كان $0<r<1$.

مما تقدم واضح ان كل فضاء متري يمكن تحويله الى فضاء تبولوجي باستخدام اقتران

المسافة d وبهذا فان لاقتران المسافة دور مهم في الحصول على نوع التبولوجيا المتكونة من الفضاءات المترية. ولكن في بعض الحالات يكون التبولوجي المتكون على الفضاء المتري

(X,d_1) هو نفس التبولوجي المتكون على الفضاء المتري (X,d_2) ولكن هذه ليست حالة عامة. اذا كان الفضاء التبولوجي المتكون على الفضاء المتري (X,d_1) يساوي الفضاء التبولوجي المتكون على الفضاء المتري (X,d_2) نسمي الاقترانيين d_1,d_2 متكافئين .

الآن نتطرق الى بعض المفاهيم التبولوجية التي طرحناها سابقا مثل – نقطة الانغلاق – نقطة التراكم –... الخ ولكن في نطاق الفضاءات المترية وقبل البدء في هذا الاسترسال نعطي التعريف التالي :

تعريف 3.4.4 : لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (X,d) ولتكن x نقطة ما تنتمي الى X فان البعد بين النقطة x والمجموعة A هي المسافة بين النقطة x واقرب نقطة اليها من المجموعة A (ان وجدت) ويرمز لها بالرمز $d(x,A)$ ، اما اذا لم توجد مثل هذه النقطة فان $d(x,A)=0$.

مبرهنة 4.4.4 : لتكن (X,d) فضاءا متريا و A مجموعة جزئية من X. لتكن x نقطة ما من نقاط X فان x نقطة انغلاق للمجموعة A اذا وفقط اذا $d(A,x)=0$.

البرهان : لتكن x نقطة انغلاق للمجموعة A. فان لكل كرة مفتوحة $B(x;r)$ من X تتقاطع مع المجموعةA. أي ان$B(x;r)\cap A\neq\phi$. لكل عدد حقيقي موجب r. هذا يعني ان$d(x,A)=0$.
بالعكس لتكن $B(x;r)$ كرة مفتوحة في X. بما ان $d(x,A)=0$ فان $B(x;r)\cap A\neq\phi$ هذا يؤدي الى ان أي كرة مفتوحة جزئية من X يجب ان تتقاطع مع المجموعة A وبالتالي فان x نقطة انغلاق للمجموعة A. #

من المبرهنة اعلاه يمكن ان نستنتج بان مجموعة انغلاق A هي$\overline{A}=\{x\in X : d(x,A)=0\}$.
نتيجة 5.4.4 : لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (X,d) ولتكن x نقطة ما من نقاط X اذا كانت $x\notin\overline{A}$ فان $d(x,A)>0$.

البرهان : ينتج مباشرة من المبرهنة (4.4.4) . #

مبرهنة6.4.4 : يكون الفضاء التبولوجي المتكون من فضاءا متريا فضاء من نوع هاوسدورف (فضاء T_2).

البرهان : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا متكونا من الفضاء المتري (X,d) ولتكن a,b نقطتين مختلفتين من نقاط X فان $r=d(a,b)\neq 0$ هذا يعني من الممكن ايجاد كرتين مفتوحتين غير متقاطعتين $B_1(a;r/2)$,$B_2(b;r/2)$ تحتويان على النقطتين a,b. وبهذا فان (X,T) فضاء تبولوجي من نوع T_2. #

5.4 اسئلة :

1- اعط مثالا لكل من الفضاءات التبولوجية الأتية : فضاء T_0، فضاء T_1، فضاء T_2، فضاء T_3، فضاء T_4.

2- ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا من نوع فضاء $T_{1/2}$ هل ان $T_{1/2}$ صفة تبولوجية ؟ برهن أو اعطِ مثال.

3- هل ان كون الفضاء التبولوجي فضاءا منتظما صفة تبولوجية ؟ برهن أو اعطِ مثال.

4- هل ان كون الفضاء التبولوجي عاديا صفة تبولوجية ؟ برهن أو اعطِ مثال.

5- لتكن T_1,T_2 تبولوجيتين على المجموعة X بحيث ان T_2 اقوى من T_1 (أي ان $T_1\subseteq T_2$). اذا كان الفضاء التبولوجي (X,T_1) من نوع فضاء T_0. برهن ان (X,T_2) من نوع فضاء T_0 ايضا .

6- كما في السؤال الخامس اذا استبدلنا نوعية الفضاء التبولوجي بفضاء $-T_2$ هل تبقى العبارة صحيحة ؟ بين ذلك .

7- ليكن كل من (X,T),(Y,S) فضاءا تبولوجيا و f اقترانا مستمرا من (X,T) الى (Y,S)، ولتكن R علاقة تكافؤ على X معرفة بالشكل الأتي : لكل a,b نقطتين من نقاط X فان (a,b) تنتمي الى R اذا وفقط اذا $f(a)=f(b)$. اذا كان الفضاء التبولوجي (Y,S) من نوع فضاء T_2. برهن ان فضاء القسمة $(X/R,T/R)$ من نوع فضاء T_2.

8- ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا من نوع فضاء T_1 و X مجموعة منتهية . برهن ان $T=P(X)$ (أي ان T التبولوجيا القوية على X) .

9- ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا منتظما ولتكن x,y نقطتين من نقاط X. برهن ان

$\{\overline{x}\}=\{\overline{y}\}$ او $\{\overline{x}\}\cap\{\overline{y}\}=\phi$

10- اعط مثالا يبين ان الفضاء المنتظم ليس بالضرورة فضاءا منتظما تماما .

11- ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا منفصلا ومن نوع فضاء T_2. لتكن $Y \subseteq X$. هل (Y,T_Y) فضاء منفصل ؟ وضح ذلك .

12- ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا يتمتع بقابلية العد الثانية ولتكن A مجموعة جزئية من X غير قابلة للعد . برهن ان :

1- A تحتوي على نقطة من نقاطها المتاخمة .

2- T_A ليست التبولوجيا القوية على A.

13- ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا متمتعا بقابلية العد الثانية . برهن ان كل اسرة مجموعات مفتوحة منفصلة من X تكون قابلة للعد .

14- ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا يتمتع بقابلية العد الثانية . برهن ان كل قاعدة الى T تحتوي على قاعدة قابلة للعد .

15- ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا يحتوي على مجموعات كثيفة قابلة للعد. بين ان (X ,T) يتمتع بقابلية العد الثانية .

16- ليكن R^2 المستوي الاقليدي وان $d(x,y)= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 +(x_2 - y_2)^2}$

لكل $x =(x_1 ,x_2)$,$y =(y_1,y_2)$ في R^2. برهن ان

1- (R^2 ,d) فضاء متري .

2- (R^2 ,d) فضاء منتظم .

3- هل (R^2 ,d) فضاء عادي ؟ وضح ذلك .

الفصل الخامس

الفضاءات التبولوجية المترابطة

الفضاءات التبولوجية المترابطة

ان خاصية الترابط في الفضاء التبولوجي درست في مراحل متعددة من قبل كثير من علماء الرياضيات ففي عام 1883 درست من قبل العالم كنتور وبعده قام العالم جوردان عام 1893 ببرهان ان أي مجموعة مغلقة ومحدودة في الفضاء الحقيقي مترابطة . اما العالم هاوسدورف (1914) فقد ادخل مفهوم المركبات (Components) المترابطة وفي نفس السنة عرف العالم هان الفضاءات المترابطة محليا (Locally connected spaces) ولكن وضعت بشكلها الحالي من قبل العالم تيتس سنة (1919). ببساطة يمكن القول بان الفضاء التبولوجي مترابط اذا كان متكونا من قطعة واحدة فقط . أي لا يمكن تجزئته الى مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين .

سنوضح في هذا الفصل بأن مجموعة الأعداد الحقيقية (خط الأعداد) تمتلك فضاءات جزئية مترابطة هي الفترات والنقاط المنفردة (single points) والمجموعة ذاتها . كذلك سنبين ان الاقتران المستمر من مجموعة الأعداد الى نفسها يقوم بنقل المجموعات المترابطة الى مجموعات مترابطة ومن هذا يمكن التعبير عن مبرهنة القيمة الوسطى (Intermediate value theorem) التي تنص على ان الاقتران المستمر f المعرف من الفترة المغلقة [a ,b] الى المجموعة R (حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية) يجب ان ينقل عناصر الفترة الى الفترة[m, M] (حيث m، M هي القيمة الصغرى والعظمى للاقتران f على التوالي بالفترة [a,b]). كذلك سنتعرف على مفهوم المركبات المترابطة في الفضاءات التبولوجية وبعض النتائج عليها وسنعطي تعريف الترابط المحلي ، نتطرق ايضا الى موضوع مهم آخر في هذا الفصل وهو الفضاءات التبولوجية المترابطة مساريا (Path connected spaces) ، ومعنى ذلك ان لكل نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء التبولوجي يمكن ايجاد مسار يربطهما بحيث يقع كله في الفضاء التبولوجي .

ان مفهوم الفضاءات التبولوجية المترابطة مساريا (او المجموعات المترابطة مساريا) اقوى من مفهوم الفضاءات المترابطة وذلك لأن كل فضاء تبولوجي (مجموعة) مترابط مساريا يكون فضاءا (مجموعة) مترابطا ولكن العكس ليس صحيح .

اخيرا سنعرج الى مفهوم الفضاء المترابط البسيط (Simple connected space) والذي يعرف بانه الفضاء الذي لا يملك ثقوب .ويجدر الاشارة هنا ان الموضوعين الأخيرين لهما علاقة وطيدة بموضوع التبولوجيا الجبرية وعلى وجه الخصوص نظرية الهموتوبيا (Homotopy theory) والذي سنتعرض الى جزء من مفهومه في الفصل السابع .

1.5 تعريف الفضاء التبولوجي المترابط

سنبدأ هذا الجزء بتعريف الفضاء التبولوجي المترابط واعطاء بعض النتائج والأمثلة على هذا النوع من الفضاءات .

تعريف 1.1.5 : يقال للفضاء التبولوجي (X ,T) أنه مترابط اذا وفقط اذا كانت المجموعتان Xوϕ الوحيدتان مفتوحتين ومغلقتين في آن واحد . فالفضاء التبولوجي الذي يمتلك مجموعة A تختلف عن Xوϕ وتكون مغلقة ومفتوحة في آن واحد يسمى فضاء غير مترابط .

تعريف 2.1.5 : لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X ,T). يقال انA مجموعة مترابطة اذا وفقط اذا كان (A ,T_A) فضاءا جزئيا مترابطا .

مثال 1: لتكن X مجموعة تحتوي على اكثر من عنصر و T التبولوجيا القوية على X فان الفضاء التبولوجي (X ,T) غير مترابط وذلك لأن المجموعة $\{a\}$(حيث $a\in X$) مفتوحة ومغلقة في X والسبب في ذلك لأن المجموعتين $\{a\}$و $X - \{a\}$ تنتميان الى T. يلاحظ ان أي مجموعة جزئية تحتوي على اكثر من عنصر تكون كذلك غير مترابطة والسبب في ذلك لأن التبولوجيا المنتجة عليها هي التبولوجيا القوية ايضا .

مثال 2: ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا بحيث ان T هي التبولوجيا الضعيفة على X فان الفضاء التبولوجي يكون مترابطا وذلك لأن المجموعتينϕ, X هما الوحيدتان المفتوحتين والمغلقتين في آن واحد في التبولوجيا T. واضح ان أي مجموعة جزئية من X مع التبولوجيا المنتجة تكون مترابطة ايضا .

مثال 3 : لتكن $X =\{a,b,c,d\}$ وان $T =\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},X\}$. يلاحظ ان T تبولوجي علىX وان الفضاء التبولوجي (X ,T)مترابط لأن المجموعتين ϕ , X هما الوحيدتان المغلقتان والمفتوحتان في آن واحد . وكل مجموعة جزئية من Xتكون مترابطة ايضا . يترك تدقيق ذلك الى القارئ .

مثال 4 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا حيث X مجموعة غير منتهية و T تبولوجيا المتممات المنتهية أي ان $T = \{A \subseteq X: X-A.$ مجموعة منتهية$\} \cup \{\phi\}$ فان الفضاء التبولوجي مترابط . وذلك لعدم وجود مجموعتين مفتوحتين (غير خاليتين) غير متقاطعتين . يلاحظ كذلك ان أي مجموعة جزئية منتهية من X هي مجموعة غير مترابطة ماعدا المجموعة الخالية ، لأن التبولوجيا المنتجة عليها هي التبولوجيا القوية بينما المجموعة الجزئية الغير منتهية من X تكون مترابطة وذلك لأن التبولوجيا المنتجة عليها هي تبولوجيا المتممات المنتهية .

مبرهنة 3.1.5 : يكون الفضاء التبولوجي (X, T) غير مترابط اذا وفقط اذا وجدت مجموعتان مفتوحتان غير خاليتين P, Q من X غير متقاطعتين واتحادهما يساوي X.

البرهان: نفرض اولا ان الفضاء التبولوجي (X, T) غير مترابط. هذا يعني وجود مجموعة غير خالية P جزئية من X مفتوحة ومغلقة في آن واحد لا تساوي X. بما ان P مجموعة مغلقة فان $C(P)= X- P$ مجموعة مفتوحة. لتكن $Q = C(P)$ وبهذا يتحقق الأتجاه الأول . بالعكس واضح ان P, Q مجموعتان مفتوحتان ومغلقتان غير خالية ولا تساوي X. #

يلاحظ ممكن الحصول على نتيجة مشابهة باستخدام مفهوم المجموعات المغلقة بدلا من المجموعات المفتوحة أي :

مبرهنة 4.1.5 : يكون الفضاء التبولوجي (X, T) غير مترابط اذا وفقط اذا وجدت مجموعتان غير خاليتين مغلقتان F, E غير متقاطعتين و اتحادهما هو المجموعة X.

البرهان : واضح باستخدام برهان المبرهنة . (3.1.5) #

تمرين: ليكن (R, T) الفضاء التبولوجي الحقيقي ولتكن $A= [a,b]$، $B=(c,d)$، $D=[a,b]\cup(c,d)$، فان A,B مجموعتان جزئيتان مترابطة بينما D مجموعة جزئية غير مترابطة لكل a,b ,c ,d عناصر مختلفة من مجموعة الأعداد الحقيقية R بحيث ان $(a < b < c < d)$

الحل : انظر الى المبرهنة القادمة (2.2.5)

مبرهنة 5.1.5: ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا ولتكن A مجموعة جزئية من X. يكون الفضاء الجزئي (A, T_A) غير مترابط اذا وفقط اذا وجدت مجموعتان مفتوحتان P, Q جزئيتان من X بحيث $Q \cap A \neq \phi$, $p \cap A \neq \phi$, $p \cap Q \subseteq X - A$, $A \subseteq p \cup Q$.

البرهان : نفرض اولا ان الفضاء الجزئي (A ,T_A) غير مترابط . هذا يعني وجود مجموعة جزئية غير خالية H من A ولا تساوي A مغلقة ومفتوحة في آن واحد . وبهذا فان $A - H$ مجموعة غير خالية لا تساوي A مغلقة ومفتوحة ايضا. وبالتالي يؤدي هذا الى وجود مجموعتين مفتوحتين P ,Q جزئيتين من X بحيث ان $A - H = Q \cap A$, $H = P \cap A$. اذن $A - H \subseteq Q$ و $H \subseteq P$ وهذا يؤدي الى

$P \cap Q \cap A = (P \cap A) \cap (Q \cap A) = H \cap (A - H) = \phi$, $A \subseteq P \cup Q$. أي ان $P \cap Q \subseteq X - H$. واضح ان $H = P \cap A \neq \phi$, $A - H = Q \cap A \neq \phi$. بالعكس ليكن P ,Q مجموعتين تحقق شروط الفرض .

لنفرض ان $H = P \cap A$, $G = Q \cap A$ فان

$A = A \cap (P \cup Q) = (A \cap P) \cup (A \cap Q) = H \cup G$.

كذلك نحصل على $H \cap G = (A \cap P) \cap (A \cap Q) = \phi$ هذا يؤدي الى ان H مجموعة مفتوحة ومغلقة في A وان $H \neq \phi$ (لأن $G \neq \phi$) وبالتالي فان A مجموعة غير مترابطة . #

مبرهنة 6.1.5 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا ولتكن A مجموعة جزئية من X. يكون الفضاء الجزئي (A ,T_A) غير مترابط اذا وفقط اذا وجدت مجموعتان F, E مغلقتان جزئيتان من X بحيث ان $E \cap A \neq \phi$, $F \cap A \neq \phi$, $A \subseteq F \cup E$, $F \cap E \subseteq X - A$.

البرهان: ينتج باستخدام طريقة مشابهة الى طريقة برهان المبرهنة (5.1.5) ويترك كتمرين . #

مبرهنة 7.1.5: يكون الفضاء التبولوجي (X ,T) مترابطا اذا وفقط اذا كانت المجموعة المتاخمة الى A لا تساوي المجموعة الخالية وذلك لكل مجموعة A جزئية من X تختلف عن ϕ و X. أي ان $Bd(A) \neq \phi$.

البرهان : نفرض اولا ان الفضاء التبولوجي (X ,T) مترابط . أي ان المجموعتين الوحيدتين المفتوحتين والمغلقتين في آن واحد هما ϕ , X . لتكن A مجموعة جزئية من X فان

$\overline{C(A)} = C(In(A))$ حسب المبرهنة (19.3.3)). نفرض ان $Bd(A) = \phi$. هذا يؤدي الى

$\overline{A} \cap C(In(A)) = \overline{A} \cap \overline{C(A)} = Bd(A) = \phi$.

نستنتج من هذا بان $A \subseteq In(A)$. بالتالي فان $A \subseteq \overline{A} \subseteq In(A) \subseteq A$ وهذا يعني ان

A مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن واحد (هذا يناقض كون الفضاء التبولوجي مترابط) اذن $Bd(A) \neq \phi$. بالعكس نفرض ان الفضاء التبولوجي غير مترابط . اذن توجد مجموعة A جزئية من X تختلف عن ϕ و X وان A مفتوحة ومغلقة في آن واحد . هذا يعني ان $A=In(A)=\overline{A}$. كذلك ان $\overline{C(A)}=C(A)$. وبالتالي فان

$Bd(A)=\overline{A}\cap\overline{C(A)}=A\cap C(A)=\phi$ وهذا يناقض الفرض . اذن الفضاء التبولوجي(X,T) مترابط . #

مبرهنة 8.1.5: ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة مترابطة جزئية من X. ولتكن B مجموعة جزئية من X تحتوي على A. اذا كانت $B\subseteq\overline{A}$ فان B مترابطة .

البرهان : نفرض ان B مجموعة غير مترابطة . هذا يعني وجود مجموعة D مفتوحة ومغلقة في آن واحد جزئية من B تختلف عنϕ و B. هذا يؤدي الى ان $B-D$ هي الاخرى مجموعة مغلقة ومفتوحة في B. بما ان $A\subseteq B\subseteq\overline{A}$ فان D اما ان تكون مجموعة جزئية من A (وهذا يناقض كون B مجموعة مترابطة) او توجد على الأقل نقطة x تنتمي الى D حيث ان x نقطة انغلاق الى A. هذا يعني ان $A\cap D\neq\phi$. بنفس الطريقة نحصل على نقطة y تنتمي الى المجموعة $B-D$ ويكون تقاطع A مع $B-D$ لا يساوي المجموعة الخالية . أي ان

$A\cap(B-D)\neq\phi$). لكن $A\cap(D\cap(B-D))=\phi$ و $A\subseteq B=D\cup(B-D)$. فان A مجموعة غير مترابطة من الفضاء التبولوجي (X,T) وهذا ايضا يناقض الفرض . اذن B مجموعة مترابطة . #

نتيجة 9.1.5 : مجموعة انغلاق أي مجموعة جزئية مترابطة من الفضاء التبولوجي(X,T) تكون مترابطة .

البرهان : ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة . #

ان معكوس النتيجة اعلاه غير صحيح ، بعبارة اخرى اذا كانت $\overline{A}$ مجموعة مترابطة ليس بالضرورة ان تكون المجموعة A مترابطة . فمثلا مجموعة الأعداد النسبية Q غير مترابطة في الفضاء التبولوجي الحقيقي (R,T) ولكن Q مجموعة كثيفة جزئية من R فان $R=\overline{Q}$ وبهذا فان (R,T) فضاء تبولوجي مترابط أي أن $\overline{Q}$ مجموعة مترابطة .

نتيجة 10.1.5 : يكون الفضاء التبولوجي مترابط اذا وجدت مجموعة جزئية كثيفة فيه و مترابطة .

البرهان : ينتج باستخدام النتيجة اعلاه . #

مبرهنة 11.1.5: ليكن كل من (X ,T) ، (Y ,S) فضاءا تبولوجيا و f اقترانا مستمرا من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y ,S). لتكن A مجموعة مترابطة جزئية من X فان $f(A)$ مجموعة مترابطة في Y.

البرهان: نفرض ان $f(A)$ مجموعة غير مترابطة . هذا يعني وجود مجموعتين مفتوحتين P ,Q جزئيتين من Y بحيث ان

$$f(A) \subseteq P \cup Q \ ,P \cap Q \subseteq C(f(A)) \ ,P \cap f(A) \neq \phi \ ,Q \cap f(A) \neq \phi$$

(باستخدام المبرهنة (5.1.5)) . بما ان f اقتران مستمر فان $B = f^{-1}(P) \ ,D = f^{-1}(Q)$ مجموعات مفتوحة جزئية من X. لكن $A \subseteq f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(P \cup Q) = B \cup D$. من جانب آخر $B \cap D = f^{-1}(P \cap Q) \subseteq f^{-1}(C(f(A))) = C(f^{-1}(f(A))) \subseteq C(A)$ وبما ان $P \cap f(A) \neq \phi, \ Q \cap f(A) \neq \phi$ فان $B \cap A \neq \phi \ , D \cap A \neq \phi$. باستخدام المبرهنة (5.1.5) مرة اخرى نحصل على ان A مجموعة غير مترابطة وهذا يناقض الفرض . اذن $f(A)$ مجموعة مترابطة في Y. #

نتيجة 12.1.5: ليكن f اقترانا مستمرا وشاملا من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y ,S). اذا كان الفضاء التبولوجي (X ,T) مترابط فان الفضاء التبولوجي (Y ,S) مترابط ايضا .

البرهان : ينتج مباشرة من المبرهنة (11.1.5) . #

نتيجة 13.1.5: ان فضاء القسمة لأي فضاء تبولوجي مترابط يكون مترابطا ايضا .

البرهان : بما ان الاقتران القانوني $q: X \longrightarrow X/R$ مستمر وشامل فباستخدام النتيجة (12.1.5) نحصل على المطلوب . #

نتيجة 14.1.5: ان صفة الترابط في الفضاء التبولوجي (X ,T) صفة تبولوجية .

البرهان : ينتج باستخدام النتيجة (12.1.5). #

مبرهنة 15.1.5 : لتكن$Y=\{a,b\}$ و S التبولوجيا القوية على Y. يكون الفضاء التبولوجي (X,T) مترابط اذا وفقط اذا الاقتران المستمر الوحيد من الفضاء التبولوجي (X,T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S) هو الاقتران الثابت .

البرهان :نفرض ان f اقتران مستمر وغير ثابت من الفضاء التبولوجي (X,T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S) فان $A=f^{-1}(\{a\}), B=f^{-1}(\{b\})$ مجموعتان غير خاليتين مفتوحتان جزئيتان من X (لأن $\{a\},\{b\}$مجموعتان مفتوحتان غير خاليتين و f اقتران مستمر غير ثابت) . بما ان $Y=\{a\}\cup\{b\}$ فان $A=C(B)$. هذا يعني ان A مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن واحد . هذا يؤدي الى ان الفضاء التبولوجي (X,T) غير مترابط (تناقض). هذا يعني ان الاقتران f يجب ان يكون ثابتا . بالعكس نفرض ان الفضاء التبولوجي (X,T) غير مترابط. هذا يعني وجود مجموعة A مفتوحة ومغلقة في آن واحد جزئية من X تختلف عن X و ϕ .

نعرف الاقتران $f:(X,T)\longrightarrow(Y,S)$ بالشكل الأتي :

$$f(A)=\{a\}\ ,\ f(C(A))=\{b\}.$$

يلاحظ ان f اقتران مستمر وغير ثابت (السبب في ذلك هو $f^{-1}(\phi)=\phi, f^{-1}(Y)=X, f^{-1}(\{a\})=A, f^{-1}(\{b\})=C(A)$.) هذا يناقض الفرض . هذا يؤدي الى ان الفضاء التبولوجي (X,T) مترابط . #

مبرهنة 16.1.5: ليكن كل من $(X_1,T_1), (X_2,T_2)$ فضاءا تبولوجيا مترابطا فان فضاء الجداء (X,T) مترابط ايضا .

البرهان : باستخدام المبرهنة (15.1.5) يكفي ان نبرهن ان الاقتران المستمر الوحيد من فضاء الجداء (X,T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S) المعرف في المبرهنة (15.1.5) هو الاقتران الثابت . لنفرض جدلا وجود اقتران مستمر غير ثابت من فضاء الجداء (X,T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S). هذا يعني وجود على الأقل نقطتين $(x_1,x_2),(y_1,y_2)$ من نقاط X بحيث ان $f((x_1,x_2))=a\ ,f((y_1,y_2))=b$. نفرض ان $f((y_1,x_2))=a$ ونعرف اقتران الاحتواء $i_{y_1}:X_2\longrightarrow X$ بالشكل الأتي $i_{y_1}(x)=(y_1,x)$. واضح ان الاقتران i_{y_1} مستمر. اذن الاقتران المركب $f\circ i_{y_1}$ مستمر ايضا . هذا يؤدي الى ان

$f_O i_{y_1})(x_2) = f(y_1, x_2) = a, f_o(i_{y_1})(y_2) = f(y_1, y_2) = b$. أي ان f اقتران غير ثابت من (X_2, T_2) الى (Y, S). وبالتالي فان (X_2, T_2) فضاء تبولوجي غير مترابط (بالأستناد الى المبرهنة (15.1.5)) . بنفس الطريقة اذا فرضنا ان $f((y_1, x_2)) = b$. نحصل على نفس النتيجة. هذا يعني ان الاقتران المستمر الوحيد من فضاء الجداء (X, T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S) هو الاقتران الثابت . وبالتالي فان فضاء الجداء مترابط . #

نتيجة 17.1.5: ليكن (X, T) فضاء الجداء للفضاءات التبولوجية المترابطة $(X_1, T_1), (X_2, T_2), \ \ , (X_n, T_n)$ فان (X, T)فضاء مترابط .

البرهان : يمكن بسهولة الحصول على برهان هذه النتيجة باستخدام الاستقراء الرياضي (Mathematical induction) والمبرهنة (16.1.5). #

2.5 تطبيقات على الفضاءات التبولوجية المترابطة

سنتطرق في هذا الجزء الى تطبيقات كثيرة الاستعمال على الفضاء التبولوجي الحقيقي ومنها مبرهنة القيمة الوسطى (Intermediate value theorem) ومبرهنة النقطة الثابتة (Fixed point theorem)... الخ . لكن في البداية سنتذكر التعريف الأتي :

تعريف 1.2.5 : تسمى المجموعة A الجزئية من R فترة اذا كانت تكتب باحدى الصيغ التالية : $(a,b), (a, b], [a ,b), [a ,b], (a, \infty), [a, \infty), (-\infty, a), (-\infty, a], R = (-\infty, \infty)$ حيث a ,b عددين في R.

مبرهنة 2.2.5: ليكن (R, T) الفضاء التبولوجي الحقيقي و A مجموعة جزئية من R تحتوي على الأقل نقطتين مختلفتين فان A مترابطة اذا وفقط اذا كانت A فترة في R.

البرهان: لتكن A مجموعة مترابطة جزئية من R. نفرض جدلا ان A ليست فترة . هذا يعني وجود على الأقل ثلاث نقاط a ,b ,c بحيث ان $a, b \in A$ و $c \notin A$ وان $a < c < b$. نفرض ان $P = (-\infty, c), Q = (c, \infty)$. واضح ان P ,Q مجموعتان مفتوحتان جزئيتان من R وان

$A \subseteq P \cup Q, P \cap Q \subseteq C(A) \neq \phi, P \cap A \neq \phi, Q \cap A \neq \phi$. هذا يؤدي الى ان A مجموعة غير مترابطة (حسب المبرهنة (5.1.5)). وهذا يناقض الفرض وبالتالي فان A فترة في R. بالعكس لتكن A فترة في R. نفرض ان A مجموعة جزئية غير مترابطة من R.

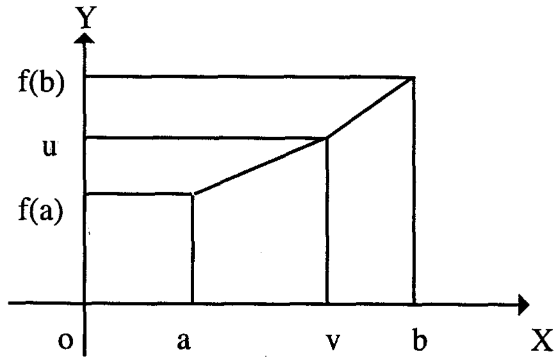
باستخدام المبرهنة (6.1.5) توجد مجموعتان F, E مغلقتان جزئيتان من R بحيث أن $A \subseteq F \cup E$, $F \cap E \subseteq C(A)$ وان تقاطع كل من F, E مع A مجموعة غير خالية . نفرض ان a نقطة ما تنتمي الى $F \cap A$ و b نقطة اخرى تنتمي الى $E \cap A$ بحيث ان $a < b$ ونفرض ان $E_1 = E \cap [a, b]$. فان E_1 مجموعة مغلقة غير خالية جزئية من R. هذا يؤدي الى وجود اكبر قيد ادنى c ينتمي للمجموعة E_1. اما ان يكون $a = c$ وفي هذه الحالة تقع نقطة c في تقاطع المجموعات E و F و A وهذا يناقض ان $F \cap E \subseteq C(A)$. اذن $a < c$. نفرض الآن $F_1 = F \cap [a, c]$ فان F_1 مجموعة مغلقة غير خالية جزئية من R. هذا يؤدي الى وجود اصغر قيد اعلى d. وفي هذه الحالة يوجد احتمالان : الأول $c = d$ فان $c \in F \cap E$ وبالتالي فان $c \in A$ وهذا يعني ان A ليست فترة وبالتالي هذا يناقض الفرض. اما الاحتمال الثاني أن تكون $d < c$ فان $(d, c) \cap (F \cup E) = \phi$ هذا يؤدي الى ان $(d, c) \cap A = \phi$ وبالتالي فان A ليست فترة لوجود نقاط بين a و b لا تنتمي الى A. وهذا ايضا يناقض الفرض . اذن A مجموعة مترابطة . #

الآن ننتقل الى مبرهنة شائعة الاستعمال هي مبرهنة القيمة الوسطى .

مبرهنة 3.2.5: ليكن $f : [a, b] \longrightarrow R$ اقترانا مستمرا حيث $a, b \in R$ (R هي مجموعة الأعداد الحقيقية) . ولتكن $f(a) \neq f(b)$ فان لكل نقطة u تقع بين النقطتين $f(a), f(b)$ توجد نقطة v تنتمي الى الفترة $[a, b]$ بحيث ان $f(v) = u$.

البرهان : بما ان $[a, b]$ فترة في R فان $[a, b]$ مجموعة مترابطة (حسب المبرهنة (2.2.5)) . هذا يؤدي الى ان $f([a, b])$ مجموعة مترابطة في R (حسب المبرهنة (11.1.5)). وبالتالي فان $f([a, b])$ فترة في R. لتكن u نقطة ما بين النقطتين $f(a), f(b)$ فان u تنتمي الى $f([a, b])$ (لأن $f(a)$ و $f(b)$ ينتميان الى $f([a, b])$) . هذا يؤدي الى وجود نقطة v تنتمي الى $[a, b]$ بحيث ان $f(v) = u$. #

يمكن تمثيل المبرهنة اعلاه هندسيا . لتكن u نقطة تقع بين النقطتين $f(a), f(b)$ فان المستقيم $y = u$ يتقاطع مع الاقتران $y = f(x)$ بنقطة ما هي (v, u) بحيث ان v تنتمي الى الفترة $[a, b]$ كما هو موضح بالشكل الأتي :



نتيجة 4.2.5 : ليكن $f: [a ,b] \longrightarrow R$ اقترانا مستمرا بحيث أن $f(a) .f(b)< 0$. إذن توجد نقطة x تنتمي الى $[a ,b]$ بحيث ان $f(x) =0$.

البرهان : بما ان $f(a). f(b) < 0$ هذا يعني ان احدى النقطتين $f(a) ,f(b)$ تمثل عدد سالب والأخرى عدد موجب وهذا يؤدي الى ان نقطة الصفر تقع بينهما . حسب المبرهنة (3.2.5) توجد نقطة x تنتمي الى $[a ,b]$بحيث $f(x) =0$. #

الآن نستخدم النتيجة اعلاه لبرهان مبرهنة النقطة الثابتة كما هو ادناه :

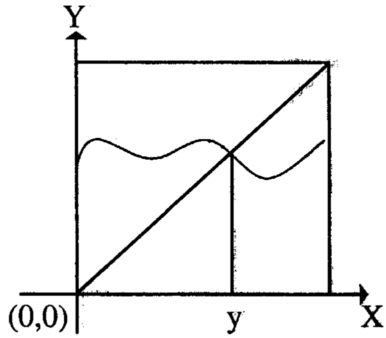
نتيجة 5.2.5 : ليكن $f :[0 ,1] \longrightarrow [0 ,1]$ اقتران مستمر . توجد نقطة y تنتمي الى الفترة $[0 ,1]$ بحيث ان $f(y) =y$.

البرهان :نفرض ان $f(0) >0$ و $f(1) <1$ وليكن g الاقتران من $[0 ,1]$ الى R المعرف بالشكل الأتي $g(x) =x - f(x)$. يلاحظ ان الاقتران g مستمر (اذا كان $g(y) =0$ فان $f(y) =y$ وبهذا ينتهي البرهان) . من تعريف الاقتران g نحصل على ان $g(0) =-f(0) < 0$ (السبب في ذلك لأن $f(0) > 0$ دائما)، وان $g(1) =1- f(1) >0$ (لأن$f(1) <1$). هذا يؤدي الى ان $g(0) .g(1) <0$ وبهذا توجد نقطة y تنتمي الى الفترة $[0 ,1]$ بحيث ان $g(y) =0$ (حسب النتيجة السابقة) وبالتالي فان $f(y) =y$. #

يمكن تفسير النتيجة اعلاه هندسيا :

بما الاقتران $f :[0 ,1] \longrightarrow [0 ,1]$ مستمر فان بيان الاقتران $y =f(x)$ يقع في مربع طول ضلعه واحد وأحد رؤوسه نقطة الأصل (0,0). اذن $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$. ان النقطة

$(y , f(y))$ تقع على المنحني $y =f(x)$ والمستقيم $y =x$. هذا يعني ان الاقتران $y =f(x)$ يجب ان يقطع المستقيم $y =x$. او بمعنى آخر ان الاقتران الذي يربط بين احد اضلاع مربع وضلعه المقابل يجب ان يقطع قطر المربع اذا كان الاقتران مستمرا . كما مبين في الشكل ادناه :



يجدر الاشارة هنا الى ان المبرهنة اعلاه هي حالة خاصة من مبرهنة العالم (Brouwer) التي تنص على ان : لكل اقتران مستمر f من I^n الى I^n (حيث $I^n =[0 ,1]^n$) توجد على الأقل نقطة $x =(x_1,x_2, \dots , x_n)$ بحيث ان $f(x)=x$، وتسمى مثل هذه النقطة بالنقطة الثابتة.

مبرهنة 6.2.5 : ليكن الفضاء التبولوجي (X ,T) متكافئ تبولوجيا مع الفضاء التبولوجي (Y,S). فان الاقتران المستمر $f :X \longrightarrow X$ يمتلك نقطة ثابتة اذا وفقط اذا كان الاقتران المستمر $g:Y \longrightarrow Y$ يمتلك نقطة ثابتة .

البرهان : بما ان الفضائيين التبولوجيين (X ,T) , (Y,S)متكافئان تبولوجيا . اذن يوجد اقترانان مستمران $h : X\longrightarrow Y , k :Y\longrightarrow X$ بحيث ان كل اقتران هو معكوس الآخر وان $hok =I_Y ,koh =I_X$. ليكن $g :Y\longrightarrow Y$ اقترانا مستمرا للبرهنة على ان g يمتلك نقطة ثابتة اذا كان $f :X\longrightarrow X$ يمتلك نقطة ثابتة . ننظر اولا الى المخطط الأتي :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[k]{} & Y \end{array}$$

من المخطط يمكن الحصول على ان $f = kogoh$. نفرض x النقطة الذي لا يؤثر عليها الاقتران f أي ان $f(x) = x$. نفرض ان $w = h(x)$ فنحصل على

$$g(w) = g(h(x)) = (hok)\ goh)\ (x) = h(kogoh)(x) = h(f(x)) = h(x) = w.$$

هذا يعني ان g يمتلك نقطة ثابتة هي w. بنفس الطريقة يمكن البرهنة على ان الاقتران المستمر f يمتلك نقطة ثابتة اذا امتلك الاقتران g نقطة ثابتة . #

نتيجة 7.2.5 : ليكن $f : [a ,b] \longrightarrow [a ,b]$ اقتران مستمر حيث a ,b ينتميان الى مجموعة الأعداد الحقيقية R فتوجد نقطة x تنتمي الى $[a ,b]$ بحيث ان $f(x) = x$.

البرهان: بما ان الفترة المغلقة $[a ,b]$ تكافيء تبولوجيا الفترة $[0 ,1]$. فان البرهان ينتج مباشرة

باستخدام المبرهنتين (5.2.5),(6.2.5). #

3.5 المركبات والفضاءات المترابطة محليا

المركبة المترابطة ببساطة هي قطعة واحدة من الفضاء التبولوجي او بصورة اكثر دقة :

تعريف 1.3.5: ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا ولتكن A مجموعة جزئية من X تحتوي على العنصر a. تسمى A مركبة a في X اذا وفقط اذا كانت A مجموعة مترابطة غير محتواة في مجموعة مترابطة اخرى .

مثال 1 : الفضاء التبولوجي المترابط يمتلك مركبة واحدة مترابطة هي المجموعة الكلية للفضاء .

هذا يبين ان الفضاء التبولوجي الحقيقي يحتوي على مركبة واحدة فقط هي R.

مثال 2 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا بحيث ان $T = P(X)$ فان لكل نقطة x تنتمي الى X تكون المركبة المترابطة الى x هي المجموعة $\{x\}$.

مثال 3 : ليكن (R ,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي ولتكن $A = (1,2] \cup [3 ,4]$. فان الفضاء الجزئي (A ,T_A) يمتلك مركبتين مترابطتين فقط هما المجموعة $B = (1 , 2]$ والمجموعة $C = [3, 4]$.

مبرهنة 2.3.5 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا . لكل نقطة a تنتمي الى X توجد مركبة مترابطة واحدة A الى a غير خالية واذا كانت D مجموعة مترابطة تحتوي على النقطة a فان $D \subseteq A$.

البرهان: بما ان المجموعة $\{a\}$تحتوي على النقطة a فاذا كانت مترابطة في X فيمكن اعتبارها مركبة الى a. اما اذا كانت $\{a\}$ليست مركبة مترابطة الى a نفرض ان A تساوي اتحاد جميع المجموعات الجزئية المترابطة التي تحتوي على النقطة a أي ان $A = \bigcup_{i \in I} D_i$ لتكن D مجموعة

مترابطة تحتوي على النقطة a. هذا يعني وجود $j \in I$ بحيث ان $D = D_j$ وبهذا فان $D \subseteq A$. الآن نبرهن ان A مركبة مترابطة الى a. نفرض ان A مجموعة غير مترابطة . هذا يعني وجود مجموعتين B, C غير خاليتين مفتوحتين وجزئيتين من A بحيث ان $C \cap B = \phi, C \cup B = A$. نفرض ان a تنتمي الى B و c تنتمي الى C بما ان c تنتمي الى A هذا يؤدي الى وجود $k \in I$ بحيث ان $c \in D_k$ حيث D_k مجموعة جزئية مترابطة من X. بما ان $D_k \subseteq A$.

فان $B_1 = B \cap D_k, C_1 = C \cap D_K$ مجموعتين مفتوحتين في D_k وان $B_1 \cap C_1 = \phi$. كذلك $C_1 \cup B_1 = (C \cap D_k) \cup (B \cap D_k) = (C \cap B) \cup D_k = D_k$.

من هذا ينتج ان D_k غير مترابطة (تناقض) وبالتالي فان A مجموعة مترابطة. وبهذا فان A مركبة مترابطة تحتوي على a. #

نتيجة 3.3.5: ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا و a, b نقطتين مختلفتين من نقاط X. نفرض أن A مركبة مترابطة الى a و B مركبة مترابطة الى b. اذا كان $a \in B$ فان $A = B$.

البرهان : نفرض ان $a \in B$ و B مركبة مترابطة الى b. هذا يؤدي الى ان $B \subseteq A$ (حسب المبرهنة (2.3.5)). بما ان $b \in B$ فان b تنتمي الى A وبنفس الطريقة نستخدم المبرهنة (2.3.5) فنحصل على $A \subseteq B$ وبهذا فان $A = B$. #

نتيجة 4.3.5: ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا نعرف العلاقة بين نقاط X بالشكل الأتي : لكل a, b نقطتين من نقاط X فان $a \sim b$ اذا وفقط اذا a, b تنتميان الى مركبة مترابطة واحدة فقط . فان العلاقة $\sim$ علاقة تكافؤ .

البرهان : بسهولة يمكن برهان ان العلاقة ~ انعكاسية ومتناظرة . نبرهن الآن ان ~ علاقة متعدية . نفرض ان $a \sim b, b \sim c$. هذا يعني وجود مجموعة مترابطة A تحتوي على العنصريين a، b ومجموعة مترابطة اخرى B تحتوي على النقطتين b , c. باستخدام النتيجة (3.2.5) نحصل على ان A =B (لأن b تنتمي الى تقاطع A مع B) . هذا يؤدي الى ان A تحتوي على a , c وبذلك فان $a \sim c$. #

من النتيجة اعلاه يمكن القول بان أي مركبة مترابطة عبارة عن صف تكافؤي للعلاقة ~ .

مبرهنة 5.3.5: لتكن A مركبة مترابطة في الفضاء التبولوجي (X,T) فان A مجموعة مغلقة.

البرهان : لتكن A مركبة مترابطة. فان $\overline{A}$ مجموعة مترابطة تحتوي على A (حسب النتيجة (9.1.5)) . هذا يؤدي الى ان $A = \overline{A}$ (حسب المبرهنة (2.3.5)). وهذا يعني انA مجموعة مغلقة في X. #

مثال : لتكن $A = \{0\} \cup \{1/n : n \in N\}$ حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية . يلاحظ ان A مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R وان المركبة الوحيدة التي تحتوي على نقطة الصفر هي المجموعة {0}. لكن المجموعة {0} ليست مجموعة مفتوحة من A. وبهذا يمكن القول بان المركبة ليست بالضرورة مفتوحة .

تعريف 6.3.5 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا . يسمى (X ,T) فضاءا غير مترابط كليا (Totally disconnected space) اذا كانت كل مركبة من مركباته حاوية على عنصر واحد فقط.

من التعريف اعلاه يمكن القول بان التبولوجيا القوية المعرفة على المجموعة X تكون فضاءا تبولوجيا غير مترابط كليا . ولكن ليس هذا هو المثال الوحيد في هذا المفهوم . فمثلا التبولوجيا المتكونة على المجموعة Q (Q مجموعة الأعداد النسبية) في الفضاء التبولوجي الحقيقي (R, T) تكون فضاءا جزئيا غير مترابط كليا مع العلم ان التبولوجيا المتكونة على المجموعة Q ليست التبولوجيا القوية . كذلك بسهولة يمكن الاستنتاج بان الفضاء التبولوجي غير المترابط كليا يكون من نوع فضاء-T_1.

تعريف 7.3.5 : يسمى الفضاء التبولوجي (X ,T) مترابطا محليا اذا وفقط اذا لكل a تنتمي

الى X ولكل مجموعة مفتوحة A تحتوي على a فان A تحتوي على مجموعة مفتوحة مترابطة B تحتوي على a.

مثال 1 : ليكن (R,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي وان $D = (0,2) \cup (3\ ,\ 4)$ فأن (D,T_D) فضاء جزئي غير مترابط ولكنه مترابط محليا .

مثال 2: ليكن $(X\ ,T)$ فضاء الجداء للفضاء التبولوجي الحقيقي $(R\ ,T)$ مع نفسه أي ان $X = RxR$ والآن نفرض ان $M = \{(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta) : r = 1-1/\theta\ ,\theta \geq 1\ \}$ وان $N = \{(\cos\theta\ ,\sin\theta) : \theta \in R\}$. فان $Y = M \cup N$ فضاء جزئي مترابط ، لأن كل نقطة من نقاط N هي نقطة تراكم الى المجموعة M ، أي ان $Y = \overline{M}$. لكن لكل نقطة x تنتمي الى N ولكل جوار مفتوح صغير جدا على النقطة x يكون غير مترابط . بهذا فان Y فضاء غير مترابط محليا .

ملاحظة 1: من المثالين اعلاه يتبين لنا عدم وجود علاقة مباشرة بين الفضاءات المترابطة والفضاءات المترابطة محليا .

ملاحظة 2 : يكون الفضاء التبولوجي $(X\ ,T)$ مترابط محليا اذا وفقط اذا وجدت قاعدة للتبولوجي تحتوي على مجموعات مترابطة .

فيما سبق (انظر المبرهنة (5.3.5)) برهنا بان المركبات في الفضاءات التبولوجية تكون مجموعات مغلقة وليس بالضرورة ان تكون مفتوحة بينما في حالة كون الفضاء التبولوجي مترابط محليا سوف نبين ان أي مركبة فيه تكون مفتوحة كما هو في المبرهنة ادناه :

مبرهنة 8.3.5 : ليكن $(X\ ,T)$ فضاءا تبولوجيا مترابطا محليا ولتكن A مركبة في X فان A مجموعة مفتوحة .

البرهان : لتكن a نقطة ما تنتمي الى A وبما ان $(X\ ,T)$ مترابط محليا . هذا يعني وجود مجموعة مفتوحة مترابطة مثل B تحتوي على النقطة a وان $B \subseteq A$ (لأن A مركبة) . بما ان لكل نقطة من نقاط A يمكن ايجاد مجموعة مفتوحة مترابطة محتواة في A فان

$$A = \bigcup_{a \in A} B_a$$

وبذلك فان A مجموعة مفتوحة . #

مبرهنة 9.3.5 : اذا كان الفضاء التبولوجي (X , T) مترابطا محليا .Y مجموعة جزئية من X و A مركبة مترابطة في Y. فان $Bd(A) \subseteq Bd(Y)$.

البرهان : نفرض ان x نقطة ما تنتمي الى $Bd(A)$ فان x تنتمي الى $\overline{A} \cap \overline{C(A)}$. هذا يؤدي الى ان $x \in \overline{A}$ وبالتالي فان $x \in Y$. أي ان $x \in In(Y) \cup Bd(Y)$. نفرض ان $x \in In(Y)$ ، هذا يعني ان x محتواة في المجموعة المفتوحة $In(Y)$ وبما ان الفضاء مترابط محليا، اذن توجد مجموعة مفتوحة مترابطة B تحتوي على x محتواة في $In(Y)$. أي ان $A \cup B$ مجموعة مترابطة . لكن A مركبة مترابطة . هذا يؤدي الى ان $A \cup B = A$. اذن $x \in A$. اما اذا كانت $B \cap C(A) = \emptyset$ فان $x \in C(A)$ (تناقض) . اذن $x \in In(Y)$ هذا يعني ان $x \in Bd(Y)$. #

مبرهنة 10.3.5 : ليكن f اقترانا مستمرا وشاملا ومفتوحا من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S). اذا كان الفضاء التبولوجي (X , T) مترابطا محليا فان الفضاء التبولوجي (Y ,S) مترابط محليا .

البرهان : ليكن y عنصر من عناصر Y و B مجموعة مفتوحة من Y تحتوي على y. فان $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة تحتوي على العنصر x(حيث $f(x) = y$) في X. بما ان الفضاء التبولوجي (X,T) مترابط محليا . اذن توجد مجموعة مترابطة ومفتوحة A جزئية من X تحتوي على العنصر x وان $A \subseteq f^{-1}(B)$. بما ان الاقتران f مفتوح فان $f(A)$ مجموعة مفتوحة مترابطة تحتوي على y وان $f(A) \subseteq B$. #

4.5 الفضاءات المترابطة مساريا

في موضوع التفاضل والتكامل يمكن مناقشة الاقتران المستمر $f: [a , b] \longrightarrow R^2$ حيث $[a ,b]$ فترة مغلقة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R. هذا الاقتران يمكن النظر اليه كمسارا (مجموعة نقاط) الذي تربط بين النقطتين $(a, f(a))$, $(b , f(b))$. السؤال الذي يمكن طرحه هنا : اذا كانت A , B نقطتين من نقاط R^2. هل من الممكن ايجاد اقتران مستمر يربط هاتين النقطتين او بعبارة اخرى هل يوجد اقتران مستمر $f: [a ,b] \longrightarrow R^2$ بحيث

ان $f(a) = A$ و $f(b) = B$. هذا ما سنتعرض اليه في هذا الجزء من هذا الفصل ولكن ليس على الفضاء R^2 فحسب بل في فضاءات اكثر شمولا هي الفضاءات التبولوجية وسوف نستبدل الفترة $[a,b]$ بالفترة $[0 , 1]$ لأن الفترتين متكافئتين تبولوجيا وسهولة التعامل مع الفترة $[0 , 1]$ وسنرمز للفترة $[0 , 1]$ بالرمز I.

تعريف 1.4.5 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا و f اقتران من I الى X. يسمى f مسارا (Path) في X اذا كان f مستمر . واضح ان المسار f يربط النقطتين $f(1), f(0)$ وتسمى $f(0)$ بالنقطة الاولية (Initial point) و $f(1)$ بالنقطة النهائية (End point) للمسار .

تعريف 2.4.5 : يسمى الفضاء التبولوجي (X ,T) مترابط مساريا (Path connected space) اذا وفقط اذا لكل نقطتين a ,b تنتميان الى X يوجد مسار f يربطهما .

اذا كانت A مجموعةجزئية غير خالية من X. تسمى A مجموعة مترابطة مساريا اذا وفقط اذا كان الفضاء الجزئي (A ,T_A) مترابط مساريا .

مثال 1 : ليكن (R ,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي . فان (R ,T) مترابط مساريا . والسبب في ذلك أن لكل نقطتين a ,b من نقاط R نعرف المسار f من I الى R بالشكل الآتي :

لكل $x \in I$ فان $f(x) = a + (b - a) x$. واضح ان f اقتران مستمر يربط النقطتين a , b وان $f(0) = a , f(1) = b$.

مثال2 : ليكن (R ,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي و $D = [0,1] \cup (3,4)$ فان المجموعة D ليست مترابطة وليست مترابطة مساريا ولكنها مترابطة محليا .

مثال3 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا حيث T التبولوجيا الضعيفة على X فان (X , T) مترابط مساريا . لأن لكل نقطتين a ,b من X فان أي اقتران f من I الى X يكون مستمرا .

مثال 4 : لتكن $X = R^2$ وان التبولوجي المعرف على X هو جداء التبولوجي الحقيقي المعرف على R. لتكن $B(a;r) = \{ x\in X : |x - a | < r \}$ فان $B(a;r)$ مجموعة مترابطة مساريا . السبب في ذلك لو فرضنا ان y, z نقطتين في $B(a;r)$ فان الاقتران $f(t) = ty +(1- t)z$ هو عبارة عن مسار في $B(a;r)$ يربط النقطتين y و z. لأن $f(0) = z , f(1) = y$ وان

$$|a - f(t) | =| t (a - y) +(1-t) (a - z) | \leq t | a - y | + (1- t) | a - z | < tr + (1- t) r = r$$

هذا يعني ان f مسار في الكرة $B(a;r)$ يربط النقطتين المذكورتين اعلاه .

مبرهنة 3.4.5 : ليكن كل من $(X ,T), (Y ,S)$ فضاءا تبولوجيا مترابطا مساريا فان فضاء الجداء لهما مترابط مساريا ايضا .

البرهان : نفرض ان (a ,b) , (c ,d) نقطتين من نقاط فضاء الجداء $X\times Y$ فان a ,c تنتميان الى X و b , d تنتميان الى Y . بما ان كل من X و Y مترابط مساريا فيوجد اقترانيين مستمرين $f :I \longrightarrow X , g :I \longrightarrow Y$ بحيث ان $f(0) =a ,f(1) =c ,g(0) =b , g(1) =d$.
نعرف الاقتران $h :I \longrightarrow X\times Y$ بالشكل الآتي :

لكل $x\in I$ فان $h(x) = (f(x) , g(x))$. يلاحظ ان h اقتران مستمر وان

$h(0) = (f(0) ,g(0)) = (a ,b) ,h(1) =(f(1) ,g(1)) = (c ,d)$. هذا يعني ان فضاء الجداء مترابط مساريا . #

يمكن تعميم المبرهنة اعلاه لأي عدد من الفضاءات التبولوجية المترابطة مساريا ويترك التعميم كتمرين للقارئ .

مثال : الفضاء التبولوجي (R^n ,T^n) مترابط مساريا لأن (R ,T) مترابط مساريا .

مبرهنة 4.4.5: ليكن f مسارا في الفضاء التبولوجي (X ,T) و g اقترانا مستمرا من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y ,S) فان gof مسارا في الفضاء التبولوجي (Y,S).

البرهان : مباشر ويترك للقارئ . #

مبرهنة 5.4.5 : ليكن g اقترانا مستمرا وشاملا من الفضاء التبولوجي (X ,T) المترابط مساريا الى الفضاء التبولوجي (Y ,S). فان (Y ,S) مترابط مساريا .

البرهان: لتكن c, d نقطتين من نقاط Y . بما ان g اقتران شامل ، هذا يؤدي الى وجود نقطتين a,b من نقاط X بحيث ان $g(a) =c$ و $g(b) =d$. بما ان (X ,T) مترابط مساريا ، هذا يعني وجود مسار f يربط النقطتين a ,b وبالتالي فان gof مسارا يربط النقطتين c ,d. هذا يؤدي الى ان الفضاء التبولوجي (Y ,S) مترابط مساريا . #

نتيجة 6.4.5 : ان صفة كون الفضاء التبولوجي مترابط مساريا صفة تبولوجية .

البرهان : واضح باستخدام المبرهنة (5.4.5) . #

ان صفة الفضاء التبولوجي المترابط مساريا هي اقوى من صفة كون الفضاء التبولوجي مترابط . أي ان الفضاء المترابط مساريا هو فضاء مترابط كما سنبينه في المبرهنة ادناه :

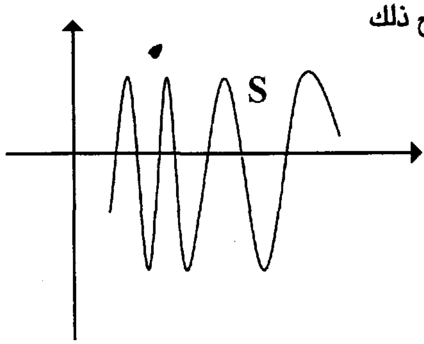
مبرهنة 7.4.5 : ليكن الفضاء التبولوجي (X ,T) مترابط مساريا فانه مترابط .

البرهان : نفرض ان(X , T)فضاء تبولوجي غير مترابط . هذا يعني وجود مجموعة غير خالية A مفتوحة ومغلقة جزئية من X ولا تساوي X. لتكن a نقطة ما تنتمي الى A و b نقطة اخرى تنتمي الى $C(A)$. بما ان الفضاء التبولوجي مترابط مساريا . هذا يؤدي الى وجود مسار f يربط النقطتين a ,b. أي ان f اقتران مستمر من I الى X بحيث ان $f(0) =a$ و $f(1) =b$. هذا يعني ان $f^{-1}(A)$ مجموعة جزئية من I (لأن $0\in f^{-1}(A)$). لكن $1\notin f^{-1}(A)$ ومن استمرارية f نحصل على ان $f^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة ومغلقة في I وهذا يناقض ان I مترابط . هذا يؤدي الى ان (X ,T) فضاء تبولوجي مترابط . #

ان معكوس المبرهنة اعلاه ليس بالضرورة ان يكون صحيحا لجميع الحالات كما هو مبين في المثال الأتي :

مثال : ليكن (R^2 ,T) الفضاء التبولوجي الاقليدي ولتكن S مجموعة جزئية من R^2 معرفة بالشكل التالي : $S =\{(x ,\sin(1/x)) :0<x \leq 1\}$.

يلاحظ ان S هي عبارة عن صورة المجموعة $(0 , 1]$ للاقتران المستمر f من R^2 الى R^2. بما ان المجموعة$(0 , 1]$ فترة في R فانها مترابطة وبهذا فان Sمترابطة اكثر من ذلك ان $\overline{S}$ مجموعة مترابطة ايضا . لكن المجموعة S ليست مترابطة مساريا لأن النقطة $(0 , 0)$ لا ترتبط بأي نقطة من نقاط S. الشكل الأتي يوضح ذلك



تعريف 4.4.5 : ليكن f مسارا في الفضاء التبولوجي (X ,T). يسمى f بالمسار المغلق اذا وفقط اذا $f(0) =f(1)$.

ان هذا النوع من المسارات تلعب دورا مهما في موضوع نظرية الهوموتبيا (homotopy theory) والتي سوف نتطرق الى بعض منها في الفصل السابع لذلك لن نتعرض هنا الى هذا النوع من المسارات بشكل مفصل .

5.5 اسئلة

1- لتكن كل من A, B مجموعة جزئية مترابطة من الفضاء التبولوجي (X, T).
برهن ان $A \cup B$ مجموعة مترابطة اذا كانت $A \cap B \neq \phi$.

2- اوجد المجموعات المترابطة للفضاء التبولوجي (X, T) في كلا مما يأتي :

1- T التبولوجيا القوية على X.

2- T التبولوجيا الضعيفة على X.

3- T تبولوجيا المتممات المنتهية على X (حيث Xمجموعة غير منتهية) .

3- لتكن $X = R$ و $T = \{X, [3, 4], \phi\}$. هل (X, T) فضاء مترابط ؟ وضح ذلك .

4- اذا كان كل من (X, T_1) , (X, T_2) فضاءا تبولوجيا مترابطا . برهن ان
$(X, T_1 \cap T_2)$ فضاءا مترابطا ايضا .

5- برهن ان أي مجموعة غير خالية مترابطة في فضاء T_1 اما ان تحتوي على نقطة واحدة فقط او عدد غير منته من النقاط .

6- لتكن E مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X, T). برهن ان E مجموعة غير مترابطة اذا وفقط اذا توجد مجموعتين غير خاليتين A, B بحيث ان $E = A \cap B$ وان $\bar{A} \cap \bar{B} = \phi$.

7- ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا مترابطا و A مجموعة مترابطة فيه . اذا كانت D مجموعة مغلقة ومفتوحة في الفضاء التبولوجي $(C(A), T_{C(A)})$. هل المجموعة $A \cup D$ مترابطة ؟ وضح ذلك .

8- برهن ان (X, T) فضاء تبولوجي مترابط اذا وفقط اذا لا يمكن كتابة X كاتحاد لمجموعتين مغلقتين غير متقاطعتين وغير خاليتين .

9- اذا كان T_1, T_2 تبولوجيتين على X بحيث ان $T_1 \subseteq T_2$. اذا كان (X, T_1) مترابطا هل
(X, T_2) مترابط وبالعكس اذا كان (X, T_2)مترابط هل (X, T_1) مترابط ؟ بين ذلك.

10- برهن ان الفضاء التبولوجي (X, T) مترابط اذا وفقط اذا لكل نقطتين من نقاط X محتواة في مجموعة مترابطة .

11- بين ان مجموعة الأعداد الحقيقية R تشكل فضاءا غير مترابط بالنسبة للتبولوجي الذي قاعدته كل الفترات التي على شكل $[a,b)$ حيث $a,b \in R$ وان $a<b$.

12- لتكن كل من A,B مجموعتين مغلقتين في الفضاء التبولوجي (X,T) و $A\cap B$, $A\cup B$ مجموعتين مترابطتين . برهن ان A,B مجموعتين مترابطتين .

13- لتكن X مجموعة الأعداد الحقيقية و $T=\{U\subseteq X: 0\in U\}\cup\{\phi\}$. برهن ان$(X,T)$ فضاء مترابط . هل $X-\{0\}$ فضاء جزئي مترابط ؟ وضح ذلك .

14- لتكن A,B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين في الفضاء التبولوجي (X,T) ولتكن $(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})=\phi$. برهن ان $A\cup B$ مجموعة غير مترابطة .

15- ليكن (R,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي و K مجموعة جزئية مترابطة من R. لتكن a,b نقطتين من نقاط K بحيث ان $a<b$. برهن ان $[a,b]\subseteq K$.

16- لتكن كل من A , B مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X,T). اذا كانت A مجموعة مترابطة و B مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن واحد بحيث ان$A\cap B\neq\phi$. برهن ان $A\subseteq B$.

17- لتكن D مجموعة مترابطة في الفضاء التبولوجي (X,T) و A,B مجموعتين مفتوحتين جزئيتين من X بحيث ان $(A\cap B)\cap D=\phi$ و $D\subseteq A\cup B$. برهن ان $D\subseteq A$ او $D\subseteq B$.

18- لتكن D مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X,T). برهن ان D تكون غير مترابطة اذا وفقط اذا وجدت مجموعتان A,B بحيث ان $D=A\cup B$ وان $\bar{A}\cap\bar{B}=\phi$.

19- لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$اسرة من المجموعات الجزئية المترابطة في الفضاء التبولوجي (X,T)بحيث ان$\bigcap_{i\in I} A_i\neq\phi$. برهن ان $\bigcup_{i\in I}A_i$ مجموعة مترابطة .

20- لتكن كل من $\{A_i\}_{i\in I}$,$\{B_j\}_{j\in J}$ اسرة من المركبات المترابطة من الفضاء التبولوجي (X,T) وان $\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{j\in J}B_j$. برهن ان الأسرتين متطابقتان (متساويتان) .

21- ليكن f اقترانا مستمرا من مجموعة الأعداد الحقيقية R الى R. برهن ان لكل فترة$[a,b]$ جزئية من R فان $f([a,b])$ تكون نقطة واحدة او فترة في R.

22- لتكن A مجموعة مفتوحة ومغلقة جزئية في الفضاء التبولوجي (X,T). هل A مركبة مترابطة في X. برهن او اعط مثالا .

23- ليكن (R,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي و Q مجموعة الأعداد النسبية . ما هي المركبات المترابطة للفضاء التبولوجي الجزئي (Q,T_Q)؟

24- ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا بحيث ان X تحتوي على عدد منته من المركبات . برهن ان كل مركبة في X تكون مفتوحة .

25- ليكن (R,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي و $K=\{1/n : n\in N\}\cup\{0\}$. ما هي مركبات الفضاء الجزئي (K,T_K)؟ وهل ان مركبات هذا الفضاء مجموعات مفتوحة ؟ وضح ذلك .

26- ليكن f اقترانا مستمرا وشاملا من الفصاء التبولوجي (X,T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S). اذا كان (Y,S) يمتلك n من المركبات. برهن ان (X,T) يجب ان يمتلك على الأقل n من المركبات .

27- برهن ان صفة الترابط محليا في الفضاء التبولوجي صفة تبولوجية .

28- لتكن A مجموعة مترابطة في الفضاء التبولوجي (X,T) و B مركبة مترابطة في $C(A)$. هل المجموعة $C(B)$ مترابطة في X ؟ بين ذلك .

29-ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا مترابطا محليا . برهن ان فضاء القسمة $(X/R, T/R)$ مترابط محليا ايضا .

30- ليكن كل من (Y,S) , (X,T) فضاءا تبولوجيا مترابطا محليا . برهن ان فضاء الجداء لهما مترابط محليا ايضا .

31- لتكن A ,B مجموعتين منفصلتين جزئيتين في الفضاء التبولوجي (X,T) ولتكن C , D مجموعتين جزئيتين من X بحيث ان $C\subseteq A$, $D\subseteq B$. برهن ان C , D منفصلتين .

32- ليكن f اقترانا مستمرا من الفضاء التبولوجي المترابط (X,T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S)و A ,B مجموعتين منفصلتين في Y. اذا كانت $f(X)\cap A\neq\phi$ و $f(X)\cap B\neq\phi$ برهن ان $f(X)\subseteq A\cup B$.

33- اذا كان (X,T) فضاءا مترابط محليا ولتكن $A\subseteq X$ و B مركبة في A برهن ان :

1- $In(B) = B \cap In(A)$

2- $Bd(B) \subseteq Bd(A)$.

3- اذا كانت A مجموعة مغلقة فان $Bd(B) = B \cap Bd(A)$.

34- ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا مترابطا محليا ولتكن A مجموعة جزئية من X بحيث ان (A, T_A) مترابط محليا . برهن ان $\overline{A}$ مترابطة محليا .

35- ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا بحيث ان $X = A \cup B$ و A, B مجموعتين مغلقتين في X. اذا كانت $A \cap B$ مجموعة مترابطة محليا . برهن ان A, B مترابطتان محليا ايضا .

36- ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا مترابطا مساريا و f اقترانا من الفضاء التبولوجي (X, T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S). هل $f(X)$ مترابطة محليا ؟ اذا كان الجواب بالنفي هل ان $f(X)$ مترابطة محليا اذا كان f اقتران مستمر ومفتوح ؟

37- ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا مترابطا مساريا و (Y, S) $f : (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ اقترانا مستمرا . برهن ان $f(X)$ مجموعة مترابطة مساريا .

38- لتكن A مجموعة كثيفة وجزئية في الفضاء التبولوجي (X, T). اذا كانت A مترابطة مساريا . هل (X, T) مترابط مساريا ؟ وضح ذلك .

39- لتكن $\{A_i\}_{i \in I}$ اسرة من المجموعات المترابطة مساريا في الفضاء التبولوجي (X, T) بحيث ان $\cap A_i \neq \phi$. برهن ان $\cup A_i$ مجموعة مترابطة مساريا .

40- ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا و f مسارا يربط النقطة a بالنقطة b. برهن أنه يوجد مسار يربط النقطة b بالنقطة a.

41- ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا و f مسارا يربط النقطة a بالنقطة b و g مسارا يربط النقطة b بالنقطة c. برهن ان يوجد مسار يربط النقطة a بالنقطة c.

42- لتكن a نقطة من نقاط الفضاء التبولوجي (X, T). لنرمز لمجموعة النقاط التي يمكن ربطها بمسار مع النقطة a بالرمز St_a أي ان

$$St_a = \{x \in X : \quad f : I \longrightarrow X, f(0) = a, f(1) = x\}.$$

برهن ان :

1- $a \in St_a$.

2- لكل $a, b \in X$ اذا كانت $b \in St_a$ فان $a \in St_b$.

3- لكل $a,b,c \in X$ اذا كانت $b \in St_a$ و $c \in St_b$ فان $c \in St_a$.

4- لكل $a \in X$ برهن ان St_a مجموعة مترابطة مساريا .

5- اذا كانت A مجموعة جزئية من X مترابطة مساريا . برهن ان توجد نقطة $a \in X$ بحيث ان $a \in St_a$.

(السؤال (46) اعلاه له علاقة وطيدة بموضوع الهوموتبي للزمر والذي.(يسمى (Groupoids)

الفصل السادس

الفضاءات التبولوجية المتراصة

الفضاءات التبولوجية المتراصة

ان الفترة المغلقة [a b] في مجموعة الأعداد الحقيقي R لها خواص تكون بعض المبرهنات صحيحة عليها وغير صحيحة على مجموعات جزئية اخرى من R ومنها مبرهنة القيمة العظمى (maximum value theorem) ومبرهنة الاستمرارية المنتظمة (Uniform continuity theorem) . ان مثل هذه المبرهنات التي تتحقق على الفترات المغلقة والمحدودة لم يعرف السبب بعدم صلاحيتها على مجموعات جزئية اخرى من R بشكل دقيق وكان يعزى السبب الى ان أي مجموعة غير منتهية جزئية من [a ,b] تمتلك نقطة حدية . وبعد ذلك طور هذا المفهوم الى مفهوم الغطاء المفتوح ومن ثم الى تعريف المجموعة المتراصة . وبشكل عام ان بعض المفاهيم والخواص التبولوجية ما هي الا تعميم لمفاهيم وخواص طبقت سابقا على مجموعة الأعداد الحقيقية ، وفي هذا المجال اذا كانت B مجموعة مغلقة ومحدودة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية فان لكل اسرة من المجموعات المفتوحة $\{A_i\}_{i\in I}$ الجزئية من R بحيث ان

$B \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ يمكن ايجاد عدد منته من المجموعات المفتوحة $A_1 , A_2 , \ldots ,A_n$ بحيث ان

$B \subseteq \bigcup_{i\in I}^{n} A_i$ هذه الخاصية للمجموعة الجزئية B تسمى بخاصية التراص (compactness).

الجدير بالذكر ان هذا المفهوم هو احدى المبرهنات على مجموعة الأعداد الحقيقية والعائدة الى العالمين هان وبورل (Heine Borel) . الآن يمكن ان نطرح السؤال التالي هل من الممكن ان تدرس هذه الخاصية على الفضاءات التبولوجية ؟ ان العالم الكسندروف قد اعطى التعريف الدقيق لهذه الخاصية على الفضاءات التبولوجية عام 1924 بالشكل الأتي :

يسمى الفضاء التبولوجي فضاءا متراصا (compact space) اذا وفقط اذا لكل تغطية مفتوحة (open cover) للفضاء توجد تغطية مفتوحة منتهية جزئية منها لنفس الفضاء .

ومن جهة أخرى ان الخواص : الترابط والترابط المساري والتراص تعتمد كليا على عناصر

الفضاء التبولوجي وان الفائدة من خاصية التراص (بالاضافة الى عملية التمييز بين الفضاءات التبولوجية) هي إمكانية دراسة الفضاء التبولوجي المتمتع بهذه الخاصية من خلال معرفة عدد منته من المجموعات الجزئية المفتوحة والتي تغطي الفضاء .

1.6 تعريف الفضاء المتراص

قبل اعطاء تعريف خاصية التراص على الفضاء التبولوجي وبعض مبرهناتها نبدأ بتعريف معنى الغطاء والغطاء المفتوح .

تعريف 1.1.6 : لتكن B مجموعة جزئية من X و $\{A_i\}_{i\in I}$ اسرة مجموعات جزئية من X. تسمى الأسرة $\{A_i\}_{i\in I}$ تغطية (غطاء) للمجموعة B اذا كانت B مجموعة جزئية من اتحاد عناصر الأسرة $\{A_i\}_{i\in I}$. اذا كانت اسرة المجموعات منتهية أي ان $A_1, A_2, ..., A_n$ بحيث ان

$B \subseteq \bigcup_{i\in I}^{n} A_i$ يسمى غطاء منته (Finite cover) للمجموعة B.

مثال 1 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا . نفرض ان لكل نقطة $a \in X$ يوجد جوار N_a للنقطة a. يلاحظ ان $\{N_a\}_{a\in X}$ غطاء للمجموعة X.

مثال 2 : لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و $A_n =[n ,n+1]$ فان الأسرة $\{A_n\}_{n\in Z}$ تمثل غطاء للمجموعة R (حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة) .

مثال3 : ليكن (R ,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي ولتكن $B = (0,1)$. نفرض ان $\{A_n\}_{n\in K}$ (حيث K مجموعة الأعداد الصحيحة الغير سالبة و $n >1$) بحيث ان $A_n = (0 , 1/n)$ فان الأسرة $C\cup \{A_n\}_{n\in N}$ (حيث ان $C =(1/3 , 1)$) غطاء للمجموعة B.

تعريف 2.1.6 : لتكن D مجموعة جزئية من X. و $\{A_i\}_{i\in I}$,$\{B_j\}_{j\in J}$ اسرتين من المجموعات الجزئية من X بحيث انهما غطاءان للمجموعة D. اذا كان لكل $i\in I$ يوجد $j\in J$ بحيث ان $A_i =B_j$ فان الغطاء $\{A_i\}_{i\in I}$ يسمى غطاء جزئي من الغطاء $\{B_j\}_{j\in J}$ للمجموعة D. وكحالة خاصة اذا كان $\{B_k\}_{k\in K}$ غطاء للمجموعة D وان K مجموعة جزئية من J يسمى الغطاء $\{B_k\}_{k\in K}$ غطاء جزئي من الغطاء $\{B_j\}_{j\in J}$.

مثال : لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و Q مجموعة الأعداد النسبية . نعرف غطاء للمجموعة R باستخدام Q بالشكل الأتي :

لكل $p \in Q$ نفرض ان $B_p = [p ,p+1]$ وواضح ان $\{B_p\}_{p\in Q}$ غطاء للمجموعة R. من ناحية اخرى نأخذ مجموعة الأعداد الصحيحة Z ونشكل غطاء للمجموعة R بالشكل الأتي: لكل $n\in Z$ نفرض ان $B_n = [n ,n+1]$. يلاحظ ان الأسرة $\{B_n\}_{n\in Z}$ تمثل غطاء للمجموعة R وان $\{B_n\}_{n\in Z}$ غطاء جزئي من الغطاء $\{B_p\}_{p\in Q}$.

تعريف 3.1.6 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا و B مجموعة جزئية من X. وليكن $\{A_i\}_{i\in I}$ غطاءا للمجموعة B. يسمى هذا الغطاء بغطاء مفتوح (open cover) اذا وفقط اذا كان $A_i \in T$ لكل $i\in I$ (A_i مجموعة مفتوحة في X).

تعريف 4.1.6 : يسمى الفضاء التبولوجي (X ,T) فضاءا متراصا اذا وفقط اذا لكل غطاء مفتوح $A =\{A_i\}_{i\in I}$ للمجموعة X يوجد غطاء جزئي منته من A للمجموعة X. أي ان يوجد عدد منته من عناصر A مثلا $A_1, A_2, ..., A_n$ تمثل غطاءا للمجموعة X.

مثال1 : لتكن $X= \{0\}\cup \{1/n : n \in N\}$ (حيث أن N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة) مجموعة جزئية من R فان (X,T_X) فضاءا متراصا .

الحل: ليكن $\{A_i\}_{i\in I}$ غطاء مفتوح الى X. هذا يعني ان $X \subseteq \cup A_i$ وهذا يؤدي الى وجود مجموعة مفتوحة A_j بحيث ان $0\in A_j$. بالتالي فان A_j تحتوي على غالبية عناصر المجموعة X ماعدا عدد منته من عناصر X. الآن نلاحظ ان لكل عنصر من عناصر X لا ينتمي الى A_j توجد مجموعة مفتوحة من الأسرة $\{A_i\}_{i\in I}$ تحتوي عليه . وبهذا يوجد عدد منته من عناصر الأسرة $\{A_i\}_{i\in I}$ تحتوي على جميع عناصر X الغير منتمية الى A_j ولتكن $A_1, A_2 , ..., A_n$ وبهذا فان $A_j ,A_1 ,A_2 , ... , A_n$ غطاء مفتوح جزئي منته على X. هذا يؤدي الى ان X فضاءا متراصا .

مثال 2: الفضاء التبولوجي الحقيقي (R , T) غير متراص .

الحل : لتكن $A_n = (n, n+2)$ لكل $n \in Z$ (حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة) . واضح ان $\{A_n\}_{n\in Z}$ غطاء مفتوح للمجموعة R . نفرض ان يوجد غطاء جزئي منته من الأسرة

وليكن مثلا $A_1, A_2, ..., A_m$. بما ان Z مجموعة غير محدودة هذا يؤدي الى وجود $\{A_n\}_{n\in Z}$ عدد صحيح موجب m+2 ينتمي الى R ولا ينتمي الى مجموعات الغطاء الجزئي (تناقض) . اذن (R , T) فضاء غير متراص .

تعريف 5.1.6 : لتكن D مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X ,T). تسمى D مجموعة متراصة في X اذا وفقط اذا الفضاء الجزئي (D ,T_D) متراصا .

ان المجموعات المفتوحة من الفضاء الجزئي (D ,T_D) هي عبارة عن تقاطع مجموعات مفتوحة من الفضاء الكلي X مع المجموعة D وبذلك يمكن القول ان المجموعة D متراصة بالاعتماد على المجموعات المفتوحة من الفضاء الكلي (X ,T) أي :

مبرهنة 6.1.6 : لتكن D مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X ,T) . فان D مجموعة متراصة اذا وفقط اذا لكل غطاء مفتوح $\{A_i\}_{i\in I}$ للمجموعة D من X يوجد غطاء جزئي منته $A_1 , A_2, ..., A_n$ للمجموعة D.

البرهان : نفرض اولا ان D مجموعة متراصة . وليكن $\{A_i\}_{i\in I}$ غطاءا مفتوحا للمجموعة D من X فان $\{A_i \cap D\}_{i\in I}$ غطاء مفتوح للمجموعة D من الفضاء التبولوجي الجزئي (D,T_D). هذا يؤدي الى وجود غطاء جزئي مفتوح منته $A_1 \cap D, A_2 \cap D, \ldots , A_n \cap D$ للمجموعة D. وبالتالي فان $A_1, A_2, \ldots , A_n$ غطاء جزئي مفتوح ومنته للمجموعة D من X. بالعكس نفرض ان $\{B_j\}_{j\in J}$ غطاء مفتوح للمجموعة D من الفضاء الجزئي (D ,T_D). بما ان لكل $j\in J$ توجد مجموعة A_j بحيث ان $B_j = A_j \cap D$ حيث A_j مجموعة مفتوحة جزئية من X . هذا يؤدي الى ان $\{A_j\}_{j\in J}$ غطاء مفتوح الى D من X. وبالتالي فان $B_1 , B_2, \ldots , B_n$ غطاء جزئي مفتوح ومنته للمجموعة D من (D ,T_D) وهذا يؤدي الى ان D مجموعة متراصة . #

يمكن تعريف خاصية التراص باستخدام مفهوم المجموعات المغلقة أي ان :

مبرهنة 7.1.6 : يكون الفضاء التبولوجي (X ,T) متراص اذا وفقط اذا كان لكل اسرة مجموعات مغلقة $\{F_i\}_{i\in I}$ بحيث $\bigcap_{i\in I} F_i = \phi$ توجد $F_1, F_2, ..., F_n$ بحيث ان $\bigcap_{i\in i}^{n} Fi = \phi$.

البرهان : ليكن (X , T) فضاءا متراصا و $\{F_i\}_{i\in I}$ اسرة مجموعات جزئية مغلقة بحيث

ان $\bigcap_{i\in I} F_i = \phi$ فان $\bigcup_{i\in I} C(F_i) = C(\bigcap_{i\in I} F_i) = C(\phi) = X$

هذا يؤدي الى ان $\{C(F_i)\}_{i\in I}$ غطاء مفتوح للمجموعة X. وبهذا يوجد غطاء مفتوح ومنته $C(F_1), C(F_2), \ldots, C(F_n)$ بحيث ان اتحاد هذه المجموعات تساوي المجموعة X. وبالتالي

فان $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = C(C(\bigcap_{i=1}^{n} F_i)) = C(\bigcup_{i=1}^{n} C(F_i)) = C(X) = \phi$.

بالعكس فللبرهنة على ان X مجموعة متراصة . نفرض ان $\{A_i\}_{i\in I}$ غطاء مفتوح للمجموعة X. فان $\{C(A_i)\}_{i\in I}$ اسرة من المجموعات المغلقة بحيث ان $\bigcap_{i\in I} C(A_i) = \phi$. هذا يؤدي الى ان

$\bigcap_{i=1}^{n} C(A_i) = \phi$ وبالتالي فان $A_1, A_2, \ldots, A_n$ غطاء من مجموعات مفتوحة للمجموعة

X . لأن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = C(\bigcap_{i=1}^{n} C(A_i)) = C(\phi) = X$. #

مبرهنة 8.1.6 : ليكن f اقترانا مستمرا من الفضاء التبولوجي (X, T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S) ولتكن A مجموعة جزئية متراصة من X . فان $f(A)$ مجموعة جزئية متراصة من Y .

البرهان : ليكن $\{B_i\}_{i\in I}$ غطاء مفتوح للمجموعة $f(A)$ فان $f(A) \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$. هذا يؤدي الى

ان $\{f^{-1}(B_i)\}_{i\in I}$ غطاء مفتوح للمجموعة A من X (لأن f اقتران مستمر) . بما ان A مجموعة متراصة . هذا يؤدي الى وجود عدد منته $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2), \ldots, f^{-1}(B_n)$ يمثل غطاءا مفتوحا للمجموعة A.

أي ان $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(B_i)$ وبالتالي فان $f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. اذن $f(A)$

مجموعة متراصة في Y. #

نتيجة 9.1.6 : ان صفة كون الفضاء التبولوجي متراص صفة تبولوجية .

البرهان : مباشر باستخدام المبرهنة (8.1.6) . #

نتيجة 10.1.6 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا متراصا فان فضاء القسمة $(X/R ,T/R)$ يكون متراصا ايضا .

البرهان : ناخذ الاقتران القانوني $q : (X ,T) \longrightarrow (X/R ,T/R)$. يلاحظ ان q اقتران مستمر وشامل وباستخدام المبرهنة (8.1.6) نحصل مباشرة على النتيجة المطلوبة . #

اذا كانت A مجموعة مفتوحة جزئية من الفضاء التبولوجي المتراص (X , T) فانه ليس بالضرورة ان تكون A مجموعة متراصة هذا ما سنبينه في المثال التالي :

مثال : لنأخذ الفترة المغلقة $[0 , 1]$، ان هذه الفترة مجموعة متراصة في مجموعة الأعداد الحقيقية هذا ما سنبرهنة في الجزء القادم من هذا الفصل . لنأخذ الفترة المفتوحة $(0,1)$ الجزئية من الفترة المغلقة $[0 ,1]$. سنبين ان هذه الفترة ليست متراصة وذلك باعطاء غطاء مفتوح لها لا يمكن تقليصه الى غطاء مفتوح جزئي منته .

لتكن $A_n = \{(1/n, 1 - 1/n) : = 3,4, \ ,n,\}$. يلاحظ ان الأسرة $\{A_i\}_{i\in I}$ (حيث $I = 3,4,$) تمثل غطاءا مفتوحا للمجموعة $(0,1)$. نفرض جدلا يوجد غطاء جزئي ومنته

الى الفترة $(0,1)$ وهو $\bigcup_{n=k}^{p} A_n$. نأخذ اكبر الأعداد من k الى p ولنرمز له بالرمز m . فان

$1/m$ لا ينتمي الى الغطاء الجزئي المفتوح ولكن $1/m$ ينتمي الى الفترة $(0,1)$. اذن الفترة المفتوحة $(0,1)$ ليست متراصة .

من المثال اعلاه يمكن القول بان خاصية التراص ليست صفة وراثية . لكن المجموعات الجزئية المغلقة من الفضاءات المتراصة تكون متراصة اي:

مبرهنة 11.1.6: أي مجموعة مغلقة جزئية من فضاء تبولوجي متراص تكون متراصة ايضا.

البرهان : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا متراصا و F مجموعة مغلقة من X. نفرض ان $\{A_i\}_{i\in I}$غطاء مفتوح للمجموعة F . أي ان $F \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. بما ان $X - F = C(F)$ مجموعة

مفتوحة في X وأن لكل A_i توجد مجموعة مفتوحة B_i في X بحيث أن $A_i = F \cap B_i$. هذا

يؤدي إلى أن $C(F) \cup B_i$ لكل $i \in I$ يمثل غطاء مفتوح الى X. بما أن (X, T) فضاء متراص، اذن يوجد غطاء جزئي مفتوح ومنته

$C(F) \cup \{B_i\}^n_{i=1}$ للفضاء X.

وبالتالي فان $\{A_i\}_{i=1}^n$ غطاء جزئي مفتوح ومنته للمجموعة F وهذا يعني ان F مجموعة متراصة . #

في المبرهنة اعلاه نجد ان شرط المجموعة المغلقة في الفضاء التبولوجي المتراص كافي لكي يجعل المجموعة متراصة ولكن اذا كانت المجموعة الجزئية متراصة في فضاء تبولوجي معين فهل هي مجموعة مغلقة ؟ ان الجواب على هذا السؤال توضحه المبرهنة التالية :

مبرهنة 12.1.6 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا من نوع فضاء T_2. اذا كانت F مجموعة متراصة في X فان F مجموعة مغلقة .

البرهان : يكفي ان نبرهن بان المجموعة $X - F = C(F)$ مفتوحة . أي لكل نقطة a تنتمي الى $C(F)$ توجد مجموعة مفتوحة A تحتوي على a وان A مجموعة جزئية من $C(F)$. نفرض ان x نقطة من نقاط F وان a تنتمي الى $C(F)$. يلاحظ ان النقطتين a و x مختلفتان. بما ان الفضاء التبولوجي (X, T) من نوع فضاء T_2 اذن توجد مجموعتان مفتوحتان A وB بحيث ان $a \in A$، $x \in B$ وان $A \cap B = \phi$.

الآن نأخذ الغطاء المفتوح $\{B_x\}_{x \in F}$ للمجموعة F (حيث B_x تمثل مجموعة مفتوحة تحتوي على x) . بما ان F مجموعة متراصة . اذن يوجد غطاء

جزئي مفتوح ومنته $\{B_{xi}\}_{i=1}^n$ للمجموعة F . واضح ان لكل x_i توجد A_a^i مجموعة مفتوحة تحتوي على a وان

$A_a \cap B_{xi} = \phi$. نأخذ $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_a$. وبهذا فان A مجموعة مفتوحة تحتوي على a ولا

تتقاطع مع أي مجموعة من مجموعات الغطاء الجزئي المفتوح والمنته $B_{x1}, B_{x2}, \dots, B_{xn}$.
هذا يؤدي الى ان A لا تتقاطع مع F . وبالتالي فان $C(F)$ A. هذا يؤدي الى ان $C(F)$

هذا يؤدي الى ان A لا تتقاطع مع F . وبالتالي فان $A \subseteq C(F)$. هذا يؤدي الى ان $C(F)$ مجموعة مفتوحة . #

مبرهنة 13.1.6 : ليكن f اقتران تقابلي ومستمر من الفضاء التبولوجي المتراص (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y ,S) الذي من نوع فضاء- T_2 فان f اقتران تكافؤ تبولوجي .

البرهان : بما ان f اقتران شامل فيمكن تعريف اقتران g من الفضاء التبولوجي (Y,S) الى الفضاء التبولوجي (X ,T) بالشكل الأتي :

$g (y) = x$ اذا كانت $f(x) = y$ حيث $x \in X , y \in Y$. يلاحظ من التعريف ان الاقتران g معكوس للاقتران f أي ان $gof = I_X$ و $fog = I_Y$. الأن نبرهن ان الاقتران g مستمر. لتكن A مجموعة مفتوحة جزئية من X أي ان $C(A)$ مجموعة مغلقة في X. باستخدام المبرهنة (11.1.6) ينتج ان $C(A)$ مجموعة متراصة . وبالاعتماد على المبرهنة (8.1.6) نحصل على ان $f(C(A))$ مجموعة متراصة في Y. لكن $g^{-1}(C(A)) = f(C(A))$. هذا يعني (باستخدام المبرهنة (12.1.6)) ان $g^{-1}(C(A))$ مجموعة مغلقة في Y . أي ان $g^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة وبهذا فان g اقتران مستمر . اذن f اقتران تكافؤ تبولوجي . #

مبرهنة 14.1.6 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا من نوع فضاء – T_2 وان D مجموعة متراصة جزئية من X ولتكن b نقطة من نقاط X لا تنتمي الى D . فانه توجد مجموعتان مفتوحتان A و B بحيث ان $D \subseteq A$ و $b \in B$ وان $A \cap B = \phi$ ..

البرهان : نفرض ان a نقطة ما تنتمي الى D و b لا تنتمي الى D . هذا يؤدي الى وجود مجموعتين مفتوحتين A_a , B_b بحيث ان $a \in A_a$, $b \in B_b$ وان $A_a \cap B_b = \phi$ (لأن الفضاء التبولوجي من نوع فضاء- T_2) . نأخذ الأسرة $\{A_a\}_{a\in D}$ حيث انها تشكل غطاء مفتوح

للمجموعة D وبالتالي يوجد غطاء مفتوح جزئي ومنته $\{A_{a_i}\}_{i=1}^{n}$. نفرض ان $B = \bigcap_{i=1}^{n} B_b^{i}$

حيث لكل n ,... ,$i = 1,2$, B_b^{i} تمثل مجموعة مفتوحة تحتوي على b ولا تتقاطع مع A_{a_i}

وبذلك فان B لا تتقاطع مع أي مجموعة من مجموعات الغطاء الجزئي المفتوح $\{A_{a_i}\}_{i=1}^{n}$.
نفرض أن

$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_{ai}$. وبهذا فان $D \subseteq A$ وان $A \cap B = \phi$. #

نتيجة 15.1.6 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا متراصا من نوع فضاء $- T_2$ فانه من نوع فضاء $- T_3$.

البرهان : ينتج مباشرة من ان (X, T) فضاء تبولوجي من نوع فضاء $-T_2$ فانه من نوع فضاء $-T_1$ والشرط الثاني يمكن الحصول عليه باستخدام المبرهنة (14.1.6) . #

نتيجة 16.1.6 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا متراصا ومن نوع فضاء $- T_2$ فانه من نوع فضاء $- T_4$.

البرهان : بما ان (X, T) من نوع فضاء $- T_2$ فانه من نوع فضاء $- T_1$. اما المطلوب الأخر نفرض ان F , E مجموعتين مغلقتين غير متقاطعتين من X. لكل نقطة b تنتمي الى F ولا تنتمي الى E توجد مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين احدهما تحتوي على النقطة b والأخرى تحتوي على المجموعة E كما في المبرهنة (14.1.6) وباستخدام نفس الطريقة لجميع نقاط المجموعة F نحصل على ان الفضاء التبولوجي عاديا وبهذا فان الفضاء من نوع فضاء $- T_4$. #

2.6 تطبيقات على الفضاءات المتراصة

سنتطرق في هذا الجزء الى بعض التطبيقات المتعلقة بمفهوم التراص ولنبدأ بالتعريف التالي :

تعريف 1.2.6 : لتكن A مجموعة جزئية من $R^n = Rx \ldots xR$ (n من المرات) . تسمى A مجموعة محدودة (Bounded) اذا وجد عدد حقيقي k بحيث ان لكل عنصر x ينتمي الى A حيث $x = (x_1, x_2, \;\; , x_n)$ فان $|x_i| < k$ لكل $1 \leq i \leq n$.

بصورة خاصة المجموعة الجزئية A من R تسمى محدودة اذا كانت محتواة في فترة مغلقة مثل $[-k, k]$ حيث $k > 0$. وبهذا فان أي فترة مغلقة $[a, b]$ تكون محدودة أي ان $[a,b] \subseteq [-k,k]$ حيث k تساوي اكبر قيمة للعدديين $| a | , | b |$.

مبرهنة 2.2.6 : لتكن A مجموعة جزئية متراصة من الفضاء التبولوجي الحقيقي (R, T) فان A مجموعة مغلقة ومحدودة .

البرهان : يلاحظ من تعريف التبولوجيا الاعتيادية على R بأن الفضاء التبولوجي الحقيقي (R,T) هو فضاء من نوع فضاء T_2 -. باستخدام المبرهنة (12.1.6) ينتج ان A مجموعة مغلقة. لكي نبرهن ان A مجموعة محدودة نفرض ان n عدد صحيح موجب وان $A_n = (-n , n)$ فان $R = \bigcup_{n \in N} A_n$ (حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة). هذا يؤدي الى ان

الأسرة $\{A_n\}_{n\in N}$ غطاء مفتوح للمجموعة A. لكن A مجموعة متراصة، هذا يعني وجود غطاء

مفتوح جزئي ومنته $A_{n1}, A_{n2}, \quad , A_{nm}$ بحيث ان $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_{ni}$. نفرض ان اكبر عدد من

الأعداد $n_1, n_2, ..., n_m$ هو k. هذا يعني ان $A_{ni} \subseteq A_{nk}$ لكل $i = 1,2, ..., m$. وهذا يؤدي الى ان $A \subseteq A_{nk}$ ومنه نحصل على ان $A \subseteq (-k, k)$ وبالتالي فان $A \subseteq [-k,k]$. اذن A مجموعة محدودة . #

مبرهنة 3.2.6 : الفترة المغلقة [0,1] متراصة في الفضاء التبولوجي الحقيقي (R , T)

البرهان : ليكن $\{A_i\}_{i\in I}$ غطاء مفتوح للفترة المغلقة [0,1]. نفرض جدلا لا يوجد غطاء جزئي مفتوح ومنته من الغطاء المفتوح $\{A_i\}_{i\in I}$ للمجموعة[0,1] . في هذه الحالة نقسم الفترة [0,1]الى فترتين مغلقتين متساويتين في الطول أي [1/2,1] , [0, 1/2]. يلاحظ ان على الأقل احدى هاتين الفترتين غير مغطاة بغطاء جزئي مفتوح ومنته من الغطاء $\{A_i\}_{i\in I}$. نفرض ان الفترة الغير مغطاة بغطاء جزئي مفتوح ومنته هي الفترة $[a_1, b_1]$. نقوم بتقسيم الفترة $[a_1,b_1]$ الى فترتين مغلقتين هما $[(a_1+b_1)/2]$, $[(a_1+b_1)/2, b_1]$. كذلك نفرض لا يوجد غطاء جزئي مفتوح ومنته من الغطاء $\{A_i\}_{i\in I}$ لاحدى الفترتين الجديدتين ولنرمز لها بالرمز$[a_2,b_2]$. اذا استمرينا بعملية التقسيم هذه سوف نحصل على متتالية من الفترات المغلقة بالشكل الأتي:

$$[0,1] = [a_0,b_0] \supseteq [a_1,b_1] \supseteq ... \supseteq [a_n, b_n]$$

ومن هذه المتتالية نحصل على الخواص التالية :

1- $[0 ,1] = [a_0 , b_0]$.

2- لكل $r = 0,1,2, \ldots ,n$ فان $b_r - a_r = 1/(2^r)$.

3- لكل $r = 0,1,2, \ldots , n-1$ فان $[a_{r+1} , b_{r+1}] = [a_r ,(a_r+b_r)/2]$ او

$[a_{r+1} ,b_{r+1}] = [(a_r+b_r)/2 , b_r]$.

4 - لكل $r = 0,1,2,$ لا يوجد غطاء جزئي مفتوح ومنته من الغطاء $\{A_i\}_{i\in I}$ للفترة $[a_r, b_r]$.

عندما نستمر بعملية التقسيم المذكورة اعلاه نحصل على متتابعة لا نهائية من الفترات المغلقة أي $[0,1] = [a_0,b_0] \supseteq [a_1,b_1] \supseteq [a_n,b_n] \supseteq \ldots$

واضح ان هذه الفترات تحقق الخواص الأربعة الأنفة الذكر . من الخاصية الثالثة نحصل على المتباينة الأتية : $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$.

هذا يعني ان لكل عددين صحيحين موجبين n ,m ينتج ان $a_m \le b_n$.وهذا يؤدي الى ان b_n قيد اعلى للمجموعة $\{ b_0, b_1, b_2, \quad , b_n, \}$. نفرض ان a اصغر قيد اعلى للمجموعة $\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$. هذا يؤدي الى ان $a \le b_n$ لكل n ومن هذا ينتج ان a قيد ادنى للمجموعة $\{b_0, b_1, b_2, \quad , b_n, \quad \}$. نفرض ان b اكبر قيد ادنى للمجموعة $\{b_0,b_1,b_2, \quad \}$ هذا يعطينا العلاقة $a \le b$. ومن تعريف a و b نحصل على المتباينة $a_n \le a \le b \le b_n$ لكل n.

من الخاصية الثانية نحصل على ان $(b - a) \le 1/(2)^n$ لكل n. بالتالي فان $a = b$. الأن بما ان $\{A_i\}_{i\in I}$غطاء مفتوح للفترة المغلقة $[0,1]$. هذا يؤدي الى وجود مجموعة مفتوحة مثل A_j بحيث ان $a = b \in A_j$. هذا يعني وجود فترة مفتوحة $B(a;r)$ جزئية من A_j. نختار عدد صحيح موجب كبير مثل N بحيث ان $1/(2)^N < r$. هذا يؤدي الى ان $b_N - a_N < r$. بما ان $a = b \in [a_N\ b_N]$ فان $a \quad a_N < 1/(2^N) < r$ وان $b \quad b_N < 1/(2^N) < r$ من هاتين المتباينتين ينتج ان $[a_N ,b_N] \subseteq B(a;r)$. وبهذا فان الفترة $[a_N ,b_N]$مغطاة بمجموعة واحدة من الغطاء الكلي هي المجموعة A_j. هذا يناقض الخاصية الرابعة . بهذا فيوجد غطاء جزئي مفتوح ومنته للفترة $[0,1]$ وبالتالي فان $[0 , 1]$ مجموعة متراصة . #

يمكن تصور برهان المبرهنة اعلاه كالأتي : ان عملية تقسيم الفترة المغلقة $[0,1]$ الى $[0,1/2]$, $[1/2,1]$ ذو نصف طول الفترة الأصلية واستمرارية عملية التقسيم نحصل على طول فترة صغير جدا . وبهذا فيمكن ان نعتبر البعد بين نهايتي الفترة بعد التقسيم مقتربة الى الصفر . بهذا نحصل على غطاء لهذه الفترة من الغطاء الكلي .

ملاحظة : يلاحظ ان من الممكن تعميم المبرهنة اعلاه على أي فترة مغلقة [a , b] جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وذلك لأن الفترة [a ,b] تكافئ تبولوجيا الفترة [0 ,1] وان خاصية التراص خاصية تبولوجية .

مبرهنة 4.2.6 : ليكن (R ,T) الفضاء التبولوجي الحقيقي . فان المجموعة A الجزئية من R تكون متراصة اذا وفقط اذا كانت A مجموعة مغلقة ومحدودة .

البرهان : لتكن A مجموعة متراصة فان A مجموعة مغلقة ومحدودة وذلك بالاستناد الى المبرهنة (2.2.6) . العكس نفرض ان A مجموعة مغلقة ومحدودة جزئية من R . هذا يؤدي الى ان A مجموعة جزئية من الفترة المغلقة [-k ,k] حيث k عدد موجب من R . لكن [-k , k] مجموعة متراصة (وذلك من الملاحظة اعلاه) . هذا يؤدي الى ان A مجموعة متراصة وذلك بالاعتماد على المبرهنة (12.1.6) . #

3.6 جداء الفضاءات المتراصة

قبل البدء باعطاء مفهوم جداء الفضاءات المتراصة وبعض النتائج عليها نستذكر التعريف الأتي :

ان اسرة من المجموعات المفتوحة B تسمى قاعدة للتبولوجي T اذا وفقط اذا لكل عنصر (عدا المجموعة الخالية) من عناصر T يمكن كتابته على شكل اتحاد لعدد من عناصر B.

مبرهنة 1.3.6 : لتكن B قاعدة للفضاء التبولوجي (X , T) . فان (X , T) فضاءا متراصا اذا كان لكل غطاء مفتوح $\{B_i\}_{i\in I}$ حيث $B_i \in B$ يوجد غطاء مفتوح ومنته $B_1 ,B_2 , ..., B_n$ للمجموعة X.

البرهان : لتكن B قاعدة للفضاء التبولوجي (X , T) وليكن $\{A_j\}_{j\in J}$ غطاء مفتوح للمجموعة X. هذا يعني ان لكل $j\in J$ يمكن كتابة A_j على شكل اتحاد لعدد من عناصر B . هذا يؤدي الى $\bigcup_{j\in J} A_j \subseteq \bigcup_{k\in K} B_k$. وبهذا فان $\{B_k\}_{k\in K}$ غطاء مفتوح للمجموعة X. من الفرض نحصل على غطاء جزئي مفتوح ومنته $B_{k1} ,B_{k2} , \ ,B_{kn}$ للمجموعة X . بما ان لكل $k\in K$ يوجد $j\in J$ بحيث ان $B_k \subseteq A_j$. يؤدي هذا الى ان

$B_{k1} \subseteq A_{j1} \ , \ B_{k2} \subseteq A_{j2}, \dots , B_{kn} \subseteq A_{jn}$.

وبالتالي فان $A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jn}$ غطاء جزئي مفتوح ومنته للمجموعة X. هذا يعني ان الفضاء التبولوجي (X, T) متراص . #

مبرهنة 2.3.6 : ليكن كل من (x, T) , (Y, S) فضاءا تبولوجيا متراصا فان فضاء الجداء لهما يكون متراصا ايضا .

البرهان : ليكن $\{A_i \times B_i\}_{i \in I}$ غطاء مفتوح لفضاء الجداء $X \times Y$ حيث A_i مجموعة مفتوحة في X و B_i مجموعة مفتوحة في Y . لتكن x_0 نقطة من نقاط X فان الفضاء الجزئي $\{x_0\} \times Y$ متكافئ تبولوجيا مع الفضاء Y وبهذا يمكن اعتبار $\{x_0\} \times Y$ فضاءا متراصا وذلك بالاعتماد على المبرهنة (10.1.6). كذلك يمكن اعتبار $\{A_i \times B_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للفضاء الجزئي $\{x_0\} \times Y$ وبهذا يوجد غطاء مفتوح جزئي ومنته $\{A_i \times B_i : i = 1,2, \dots, n\}$ للفضاء الجزئي $\{x_0\} \times Y$ معتمدا على النقطة x_0. نفرض ان

$$A(x_0) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$ ، هذا يؤدي الى ان $\{A(x_0) \times B_i : i = 1,2, \dots, n\}$

غطاء مفتوح جزئي ومنته الى $\{x_0\} \times Y$. وباستخدام نفس الطريقة لجميع نقاط X نحصل على ان $\{A(x) : x \in X\}$ غطاء مفتوح الى X . لكن X فضاء متراص هذا يؤدي الى وجود غطاء مفتوح جزئي ومنته $\{A(x_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ الى X. بما ان $A(x_i)$ عبارة عن تقاطع عدد منته من مجموعات مفتوحة في X فيمكن اختيار المجموعات المفتوحة $A(x_j) \in \{A_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ حيث $j = 1,2, \dots, m$ وبهذا فان $\{A(x_j) : j = 1,2, \dots, m\}$ غطاء مفتوح الى X وبالتالي فان $\{A(x_j) \times (B_i) : j = 1,2, \dots, m, i = 1,2, \dots, n\}$ يمكن اعتباره غطاء مفتوح جزئي ومنته الى $X \times Y$ وبهذا فان $X \times Y$ فضاء متراص . #

يمكن تعميم المبرهنة اعلاه على عدد منته من الفضاءات التبولوجية المتراصة أي ان :

نتيجة 3.3.6 : لتكن كل من (X_1, T_1) , (X_2, T_2) , ... , (X_n, T_n) فضاءا تبولوجيا متراصا فان فضاء الجداء لها يكون متراص ايضا.

البرهان : ينتج باستخدام الاستقراء الرياضي وبالاعتماد على المبرهنة (2.3.6). #

نتيجة 4.3.6 : لتكن I الفترة المغلقة $[0,1]$ الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية فان I^n

مجموعة متراصة في الفضاء التبولوجي (R^n, T^n).

البرهان : يمكن استنتاجه بالاعتماد على المبرهنة (3.2.6) والنتيجة (3.3.6) . #

مبرهنة 5.3.6 : لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (R^n, T^n). فان A مجموعة متراصة اذا وفقط اذا A مجموعة مغلقة ومحدودة .

البرهان : لتكن A مجموعة جزئية متراصة من الفضاء التبولوجي (R^n, T^n) . بما ان (R^n, T^n) فضاء من نوع فضاء- T_2 فان A مجموعة مغلقة حسب المبرهنة (12.1.6) . الأن نبرهن ان A مجموعة محدودة . نفرض ان لكل عدد صحيح موجب m نأخذ

$$B_m = \{ (x , y) \in R^n \times R^n : | x_i | + | y_i | < 2 m, i = 1,2, \quad , m\}$$

حيث ان $x = (x_1, x_2, \dots , X_n) , y = (y_1, y_2, \dots , y_n)$ فان $R^n = \bigcup_{m\in N} B_m$

حيث N مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة . هذا يعني ان $\{B_m\}_{m\in N}$غطاء مفتوح ومنته للمجموعة A . لكن A مجموعة متراصة . هذا يؤدي الى وجود غطاء جزئي مفتوح $B_{m1}, B_{m2} , \dots, B_{mk}$ للمجموعة A . لتكن d اكبر عدد من الأعداد الصحيحة الموجبة $\{m_1, m_2, \dots , m_k\}$. هذا يؤدي الى ان $B_{mi} \subseteq B_{md}$ لكل $i = 1,2, \dots, k$. أي ان$A\subseteq B_{md}$. وبالتالي فان A مجموعة محدودة . بالعكس سنبرهن اولا ان كل (مكعب) مركزه نقطة الأصل وطول ضلعه 2k يكتب بالشكل الأتي :

$$.M_k = \{x = (x_1, x_2, \dots , x_n)\in R^n : | x_i | \le k , i = 1,2, \dots, n\}$$

عبارة عن مجموعة متراصة في R^n. نعرف الاقتران f من المجموعة I^n الى المجموعة M_k بالشكل الأتي : $f (x_1, x_2, \dots , x_n) = (2kx_1 - k, 2kx_2 \; k, \dots , 2kx_n - k)$

يلاحظ ان f اقتران تكافؤ تبولوجي . هذا يعني ان M_k مجموعة متراصة (حسب المبرهنة (14.1.6)) . بما ان A مجموعة مغلقة ومحدودة فان هذا يؤدي الى وجود مجموعة M_k متراصة تحتوي على المجموعة A وبالتالي فان A مجموعة متراصة . #

4.6 الفضاءات المتراصة محليا

نبتدأ مباشرة بتعريف الفضاء المتراص محليا في هذا الجزء من هذا الفصل .

تعريف 1.4.6 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا . يسمى (X , T) فضاءا متراصا محليا اذا

وفقط اذا وجد لكل نقطة a تنتمي الى X مجموعة مفتوحة A تحتوي على النقطة a بحيث أن $\overline{A}$ مجموعة متراصة .

مثال 1 : الفضاء التبولوجي الحقيقي (R ,T) متراص محليا .

حيث ان لكل نقطة x تنتمي الى R وان (a ,b) فترة مفتوحة تحتوي على x فأن

$\overline{(a\ ,b)} =[a , b]$ حيث $[a ,b]$ مجموعة متراصة . بينما يلاحظ ان الفضاء الجزئي لمجموعة الأعداد النسبية Q غير متراص محليا والسبب في ذلك لو فرضنا ان x نقطة من نقاط Q وان A مجموعة مفتوحة تحتوي على x فأن $\overline{A}$ ليست متراصة في Q .

مثال 2 : الفضاء التبولوجي الاقليدي (R^n ,T^n) متراص محليا .

لو أخذنا $x = (x_1,x_2,...,x_n)$ نقطة ما تنتمي الى R^n فأن المجموعة

$$A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \quad \times (a_n, b_n)$$

تحتوي على النقطة x بحيث ان $x_i \in (a_i ,b_i)$ لكل $i = 1,2, \dots , n$ فأن

$\overline{A} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ مجموعة متراصة في R^n.

الآن نبين ان صفة التراص المحلي صفة تبولوجية ووراثية هذا ما سنتطرق اليه في المبرهنتين التاليتين :

مبرهنة 2.4.6 : ليكن f اقترانا مستمرا مفتوحا وشاملا من الفضاء التبولوجي المتراص محليا (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S). فان (Y ,S) متراص محليا ايضا .

البرهان : لتكن b نقطة من نقاط Y. هذا يؤدي الى وجود نقطة a في المجموعة X بحيث ان $f(a) = b$. بما ان (X , T) متراص محليا . هذا يؤدي الى وجود مجموعة مفتوحة A تحتوي على النقطة a وان $\overline{A}$ مجموعة متراصة . لكن الاقتران f مفتوح هذا يعني ان $f(A)$ مجموعة مفتوحة تحتوي على النقطة b وان $f(\overline{A})$ مجموعة متراصة بالاعتماد على المبرهنة (8.1.6). أي ان $\overline{f(A)}$ مجموعة متراصة (بسبب ان الاقتران f مستمر) . وبالتالي فان الفضاء التبولوجي $(Y\ ,S)$ متراص محليا . وبهذا فأن صفة التراص المحلي صفة تبولوجية . #

مبرهنة 3.4.6 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا متراصا محليا و F مجموعة جزئية مغلقة من X فان F متراصة محليا .

البرهان : لتكن a نقطة ما تنتمي الى F . هذا يعني ان a نقطة من نقاط X. وهذا يؤدي الى

وجود مجموعة مفتوحة A جزئية من X تحتوي على النقطة a بحيث ان $\overline{A}$ مجموعة متراصة .
نفرض ان $\overline{B} = F \cap \overline{A}$ فان $\overline{B}$ مجموعة مغلقة في X وانها تحتوي على النقطة a . واضح ان $\overline{B}$ مجموعة مغلقة ومتراصة . من ناحية اخرى ان $B = F \cap A$ مجموعة مفتوحة وجزئية في F وتحتوي على النقطة a. هذا يعني ان F متراصة محليا . وبهذا فأن التراص المحلي ليس صفة وراثية (انظر المثال رقم (1) في بداية هذا الجزء) . #

مبرهنة 4.4.6 : يكون الفضاءان التبولوجيان $(X ,T) , (Y ,S)$ متراصين محليا اذا وفقط اذا كان فضاء الجداء لهما متراصا محليا .

البرهان : بما ان الاقترانيين الاسقاطيين $P_1: X \times Y \longrightarrow Y, p_2: X \times Y \longrightarrow Y$ مستمران ومفتوحان وشاملان فان الفضائيين التبولوجين $(X , T) , (Y , S)$ متراصان محليا وفق المبرهنة (3.4.6) . بالعكس نفرض ان (a ,b) نقطة من نقاط المجموعة $X \times Y$. هذا يعني ان a نقطة تنتمي الى X و b نقطة تنتمي الى Y وهذا يعطينا مجموعتين مفتوحتين A و B في X و Y على التوالي وان a تنتمي الى A و b تنتمي الى B وبهذا فان $\overline{B} , \overline{A}$ مجموعتان متراصتان . نفرض ان $W = A \times B$. واضح ان W مجموعة مفتوحة في فضاء الجداء $(X \times Y , T \times S)$ وتحتوي على النقطة (a ,b) وان $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ مجموعة متراصة في فضاء الجداء بالاستناد الى المبرهنة (2.3.6) . #

نتيجة 5.4.6: تكون الفضاءات التبولوجية $(X_1 , T_1) ,(X_2 , T_2) , \dots ,(X_n , T_n)$ متراصة محليا اذا وفقط اذا كان فضاء الجداء لها متراصا محليا .

البرهان : ينتج باستخدام المبرهنة (4.4.6) والاستقراء الرياضي . #

5.6 أسئلة

1- ليكن (X,T) ضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية منتهية من X. برهن ان A مجموعة متراصة .

2- ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا من نوع فضاء T_2 و (X ,S) فضاءا تبولوجيا متراصا بحيث ان S اقوى من T (أي $T \subseteq S$) . برهن ان $T = S$.

3- ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا و T اصغر تبولوجيا على X تجعل (X ,T) من نوع فضاء T_1. برهن ان الفضاء التبولوجي (X ,T) فضاء متراص .

4- برهن ان الفضاء التبولوجي المتراص والمترابط محليا يكون عدد مركباته عددا منتهيا .

5- برهن ان اتحاد عدد منته من مجموعات متراصة يكون متراصا .

6- ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا من نوع فضاء- T_2. برهن ان تقاطع أي عدد من مجموعات متراصة فيه تكون مجموعة متراصة .

7- ليكن (X , T) الفضاء التبولوجي للمتممات المنتهية . برهن ان (X, T) فضاء متراص كذلك بين ان أي مجموعة جزئية من X هي الأخرى متراصة .

8- ليكن T_1 ,T_2 تبولوجيتان على X بحيث ان $T_1 \subseteq T_2$. ماذا يعني تراص بالنسبة لأحداهما لتراصه بالنسبة للأخرى .

9 - ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا منتظما و A مجموعة متراصة جزئية من X و B مجموعة مغلقة لا تتقاطع مع A. برهن وجود مجموعتين مفتوحتين وغير متقاطعتين G, H تحتويان A, B على التوالي .

10- ليكن f اقترانا مستمرا من الفضاء التبولوجي المتراص (X ,T) الى فضاء تبولوجي (Y, S) من نوع فضاء T_2. برهن ان f اقتران مغلق .

11- ليكن (R_2 , T) الفضاء التبولوجي الاقليدي . برهن ان I^2 متراص في R^2.

12 - ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا متراصا ولتكن $\{F_n\}_{n\in N}$ (حيث $N=\{0,1,2, \dots\}$ وان $F_n \neq \phi$ لكل n) اسرة من المجموعات المغلقة والجزئية من X وان $F_{n+1} \subseteq F_n$ لكل n.
برهن ان $\bigcap_{n\in N} F_n \neq \phi$.

13- لتكن $I = [0,1]$ و $F \subseteq I$. تسمى F مجموعة جزئية مغلقة في I اذا وفقط اذا كانت F مجموعة منتهية او تساوي I . برهن ان تعريف هذه المجموعات تشكل تبولوجي T على المجموعة I . برهن كذلك ان الفضاء التبولوجي (I , T) مترابط ومترابط مساريا ومتراص لكنه ليس من نوع فضاء T_2.

14- هل صفة التراص أو التراص المحلي في الفضاء التبولوجي صفة وراثية . اذا كان الجواب بالنفي اعط امثلة تبين ذلك .

15- لتكن A مجموعة جزئية كثيفة ومتراصة محليا من الفضاء التبولوجي (X ,T) بحيث ان (X , T) من نوع فضاء T_2. برهن ان A مجموعة مفتوحة .

الفصل السابع

زمرة الهوموتبيا الأساسية

زمرة الهوموتبيا الأساسية

The fundamental homotopy group

كما ذكرنا في مقدمة الكتاب ان مشكلة التصنيف تأخذ حيزا كبيرا في علم التبولوجيا العامة وان اقتران التكافؤ التبولوجي يقوم بهذه المهمة ولكن صعوبة البحث عن وجود هذا الاقتران بين فضائيين تبولوجيين استخدمت الخواص التبولوجية بدلا من اقتران التكافؤ التبولوجي. لكن هذه الخواص هي الأخرى لن تفي بالغرض المطلوب لجميع الفضاءات وبهذا استحدث علم التبولوجيا الجبرية للقيام بهذا الواجب لبعض الفضاءات التبولوجية ومثال ذلك ان الكرة (Sphere) والطرة (Tours) متشابهان بالخواص التبولوجية العامة ولكنهما غير متكافئين تبولوجيا والسبب في ذلك ان الزمرة الهوموتبية الأساسية المتكونة عليهما ليست متشاكلة (isomorphism). سنبين في نهاية هذا الفصل بأن الفضاءات المتكافئة تبولوجيا تمتلك زمر متشاكلة .

في الواقع ان ظهور علم التبولوجيا الجبرية هو ليس هدفه هذه المهمة فقط وانما له أهمية اخرى وهي عملية نقل المشكلة التبولوجية الى مشكلة جبرية لكي يوجد لها الحل في المفهوم الجبري ثم ارجاعها الى اللغة الأصلية .

في هذا الفصل سوف نقتصر على كيفية تكوين الزمرة الهومونبة الأساسية واعطاء مثال على ذلك . وببساطة اذا كان (X ,T) فضاءا تبولوجيا و x_0 نقطة من نقاط X فأننا سننشأ زمرة على X بالنسبة الى x_0 ويرمز لهذه الزمرة بالرمز $\pi (X;x_0)$ وسنسميها زمرة الهوموتبيا الى الفضاء (X , T) على النقطة x_0 وتسمى النقطة x_0 بنقطة القاعدة (base point). ان هذه الزمرة تتكون بالاعتماد كليا على مفهوم المسارات المغلقة والتي عرفت في الفصل الخامس .

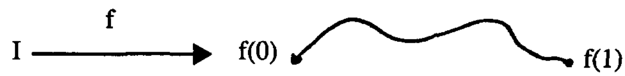
ان الهدف من هذا الفصل (كما ذكر اعلاه) هو بيان اهمية الزمرة الأساسية في تصنيف الفضاءات التبولوجية وهذه العملية تتم عندما نبين ان الزمرة الهوموتبية الأساسية هي خاصية تبولوجية او بعبارة اخرى اذا كان (X , T) , (Y ,S) فضائيين تبولوجيين و f اقترانا من (X ,T) الى (Y,S) ولتكن $\pi (X;x_0)$, $\pi (Y; f (x_0))$ الزمرتين الأساسيتين على الفضائيين X ,Y على التوالي وان الزمرتين غير متشاكلتين فان الفضائيين غير متكافئين تبولوجيا . من ناحية أخرى اذا كان الاقتران f مستمر فانه يوجد اقتران متماثل (homomorphism) بين

الزمر الأساسية للفضائيين . هذا يعني انه من الممكن دراسة الاقتران f من خلال دراسة التماثل بين الزمر الأساسية لهذه الفضاءات .

1.7 تعريف الزمرة الهوموتبية الأساسية

في هذا الجزء سوف ننشأ مجموعة من العناصر التي تتصف ببعض الخواص التي تحققها أي زمرة . وبشكل أولي نستعيد مفهوم المسار في الفضاء التبولوجي .

تعريف 1.1.7 : ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا فان الاقتران المستمر f من الفترة المغلقة $I = [0, 1]$ الى X يسمى مسارا في X يربط النقطتين $f(0)$, $f(1)$. وتسمى النقطة $f(0)$ نقطة بداية المسار (initial point) والنقطة $f(1)$ نقطة نهاية المسار (end point) . كما مبين في الشكل ادناه :



تعريف 2.1.7 : يسمى الفضاء التبولوجي (X ,T) مترابطا مساريا اذا وفقط اذا وجد لكل نقطتين a , b من نقاط X مسار f في X بحيث ان $f(0) = a$ و $f(1) = b$.

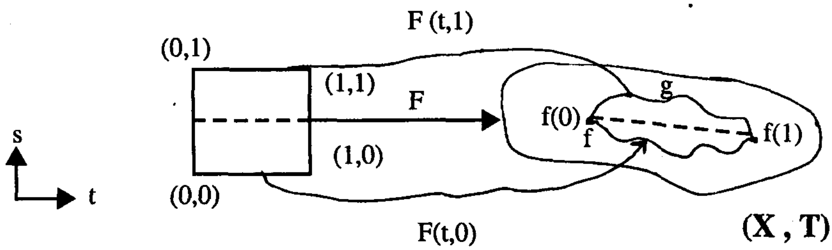
كما لاحظنا سابقا (في الفصل الخامس) ان الفضاء التبولوجي المترابط مساريا يكون مترابطا لكن العكس غير صحيح .

تعريف 3.1.7 : ليكن f , g مسارين في الفضاء التبولوجي (X ,T) بحيث ان $f(0) = g(0)$ و $f(1) = g(1)$. يسمى المساران f , g متكافئين هوموتبيا ويرمز لهما بالرمز $f \sim g$ اذا وفقط اذا وجد اقتران مستمر $F : I \times I \longrightarrow X$ يحقق الشروط الأتية :

1) $F(t, 0) = f(t), F(t,1) = g(t)$

2) $F(0,s) = f(0) = g(0), F(1,s) = f(1) = g(1).$

يسمى الاقتران F باقتران الهوموتبي . الشكل ادناه يبين التكافؤ بين مسارين في فضاء تبولوجي معين



وبشكل بسيط يكون المساران f , g متكافئين هوموتبيا اذا كان من الممكن ازاحة احد المسارات الى الأخر داخل الفضاء والحفاظ على نقطتي المسار ثابتتين .

الآن نبين ان العلاقة ~ هي علاقة تكافؤ .

مبرهنة 4.1.7 : العلاقة ~ هي علاقة تكافؤ .

البرهان : ليكن f مسارا في X. نعرف الاقتران $F : I \times I \longrightarrow X$ بالصيغة الأتية :

$F(t,s) = f(t)$ هذا يؤدي الى ان F اقتران يحقق خواص اقتران الهوموتبي وهذا يعني ان $f \sim f$ أي ان العلاقة ~ انعكاسية . الآن نبرهن ان العلاقة ~ متناظرة . نفرض ان f , g مسارين في X بحيث ان $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ وان $f \sim g$. هذا يؤدي الى وجود اقتران $F : I \times I \longrightarrow X$ يحقق شروط اقتران الهوموتبي . نعرف الآن الاقتران $G : I \times I \longrightarrow X$ بالصيغة الأتية : $G(t,s) = F(t,1-s)$. واضح ان الاقتران G مستمر وان

$$G(t,0) = F(t,1) = g(t) \ , \ G(t,1) = F(t,0) = f(t)$$

$$G(0,s) = F(0,1-s) = f(0) = g(0) \ , G(1,s) = F(1,1-s) = f(1) = g(1)$$

هذا يؤدي الى ان $g \sim f$ وبذلك فأن ~ علاقة متناظرة .

اخيرا ولغرض بيان العلاقة ~ متعدية نفرض ان $f \sim g$, $g \sim h$. هذا يعني وجود اقتراني هوموتبي مستمرين $F : I \times I \longrightarrow X$ و $G : I \times I \longrightarrow X$ بحيث ان

$$F(t,0) = f(t) \ , F(t,1) = g(t), F(0,s) = f(0) = g(0), F(1,s) = f(1) = g(1)$$

$$G(t,0) = g(t), G(t,1) = h(t) \ , G(0,s) = g(0) = h(0) \ , G(1,s) = g(1) = h(1).$$

نعرف الآن الاقتران $H : I \times I \longrightarrow X$ بالصيغة التالية :

$$H(t,s) = \begin{cases} F(t,2s) & 0 \le s \le 1/2 \\ G(t, 2s-1) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

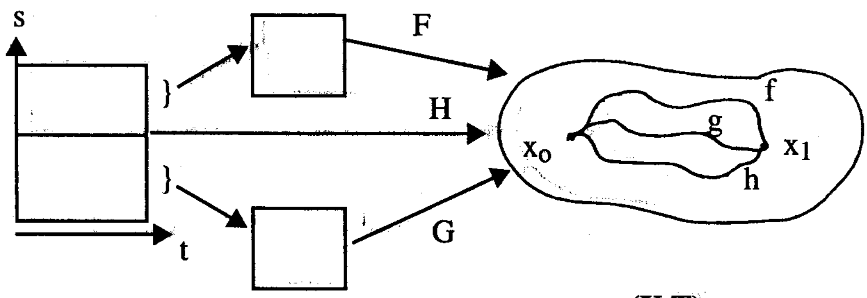
يلاحظ بسهولة ان الاقتران H مستمر و ان

$H(t,0) = F(t,0) = f(t)$, $H(t,1) = G(T, 1) = h(t)$. $H(0,s) = F(0,2s) = f(0) = g(0) = h(0)$, $H(1,2s) = f(1) = g(1) = h(1)$.

وهذا يعني ان $f \sim h$. اذن العلاقة ~ علاقة تكافؤ . لنرمز للصف التكافؤي بالرمز [f].

الشكل ادناه يوضح الاقترانات المعرفة اعلاه في الشكل ستكون النقطة

$f(0) = g(0) = h(0) = x_0$ والنقطة $f(1) = g(1) = h(1) = x_1$.



(X.T)

من العلاقة اعلاه حصلنا على صفوف تكافؤ للمسارات . الأمثلة التالية تبين بعض المسارات المتكافئة هوموتبيا وغير المتكافئة هوموتبيا .

مثال1: ليكن f ,g مسارين في R^2 يربطان النقطتين a ,b أي ان $f(0) = g(0) = a$ و $f(1) = g(1) = b$. فان المسارين متكافئان هوموتبيا .

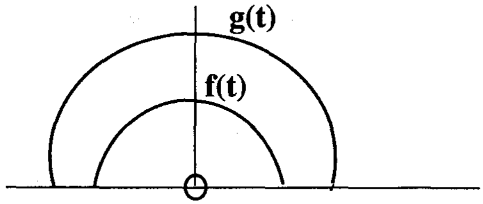
الحل : نعرف الاقتران $F : I \times I \longrightarrow R^2$ بالشكل الآتي : $F(t,s) = (1-s)f(t) + s\, g(t)$

واضح ان F اقتران مستمر لأنه معرف بدلالة اقترانين مستمرين ويمكن بسهولة من التأكد بان الاقتران F يحقق شروط اقتران الهوموتبي هذا يؤدي الى ان $f \sim g$.

مثال 2 : لتكن $X = R^2 - \{(0,0)\}$ و f ,g مسارين في X بحيث ان

$f(t) = (\cos\pi t , \sin\pi t) , g(t) = (\cos\pi t , 2\sin\pi t)$.

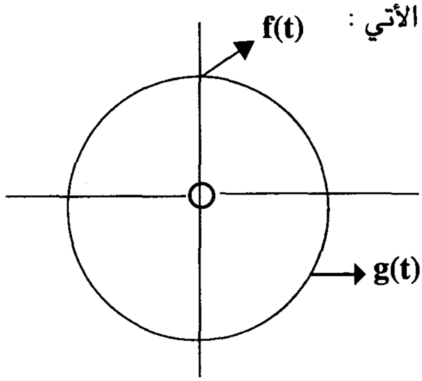
يلاحظ ان المسارين f , g متكافئان هوموتبيا وذلك باسقاط المسار gعلى المسار fباقتران الهوموتبي $F : I\times I \longrightarrow X$ بحيث ان $F(t,s) = sg(t) + (1- s)f(t)$. واضح ان F اقتران مستمر ويحقق شروط اقتران الهوموتبي بين f, g كما موضح في الشكل ادناه :



مثال **3** : لتكن $X = R^2 - \{(0,0)\}$ و f , g مسارين في X معرفيين بالشكل التالي :

$f(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)) , g(t) = (\cot(\pi t) , - \sin (\pi t))$.

ان المسارين اعلاه غير متكافئين هوموتبيا والسبب في ذلك هو عدم امكانية تعريف اقتران هوموتبي بينهما وذلك عائد الى ان أي اقتران يقوم بازاحة احد المسارين الى الأخر يجب ان يمر بالنقطة $(0,0)$ لكن هذه النقطة غير موجودة في X وبهذا يكون الاقتران غير مستمر كما هو موضح في الشكل الأتي :



الآن ننتقل الى تعريف عملية الضرب على صفوف التكافؤ المتكونة من خلال علاقة التكافؤ السابقة $(\sim)$ على النحو التالي :

تعريف 5.1.7: ليكن f مسارا في X يربط النقطتين x_0, x_1 و g مسارا آخر في X يربط النقطتين x_1, x_2 نرمز لتركيب المسارين f , g بالرمز $f*g$ ونعرف التركيب بالشكل الأتي

$$h(t) = (f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ g(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

يلاحظ ان h مسارا في X يربط النقطتين x_2, x_0.

يمكن النظر الى h بأنه مسارا نصفه الأول متكون من المسار f والنصف الثاني متكون من المسار g. كذلك يمكن اعتبار الفترة I بانها فترة زمنية مقدارها وحده واحدة فعند تعريف المسار h نقسم الفترة الى قسمين متساويين ونضاعف السرعة الى المسارين f, g للحصول على المسار h. الآن نعرف عملية التكافؤ الانفة الذكر على النحو التالي :

ليكن [f], [g] صفيين تكافئيين بحيث ان f مسار من x_0 الى x_1 و g مسار من x_1 الى x_2. فان $[f].[g] =[f *g]$.

تمرين: ليكن f_1, f_2 مسارين يربطان النقطتين x_0, x_1 بحيث ان $f_1 \sim f_2$ وليكن g_1, g_2 مسارين يربطان النقطتين x_1, x_2 بحيث ان $g_1 \sim g_2$. برهن ان $f_1 * g_1 \sim f_2 * g_2$.

الحل: من تكافؤ المسارين f_1, f_2 نحصل على اقتران هوموتبي F ومن تكافؤ المسارين g_1, g_2 نحصل على اقتران تكافؤ هوموتبي G. نعرف اقتران $H : I \times I \longrightarrow X$ بالصيغة الأتية:

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(2t-1, s) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

ويمكن بسهولة معرفة ان الاقتران H مستمر ويحقق شروط اقتران الهوموتبي بين المسارين $f_1 * g_1 , f_2 * g_2$، هذا يعني ان تعريف عملية الضرب اعلاه لا تعتمد على ممثل الصف التكافؤي او بعبارة اخرى ان التعريف صحيح مهما يكن العنصرين الواردين من الصفين التكافؤيين .

مبرهنة 6.1.7 : ان عملية الضرب المعرفة اعلاه تتمتع بالخواص التالية :

1) الخاصية التجميعية : ليكن [f], [g], [h] صفوف تكافؤ بحيث ان $f * g$, $g * h$ معرفان (أي يمكن تركيب f مع g و g مع h) فان

$([f].[g]).[h] = [f].([g].[h])$.

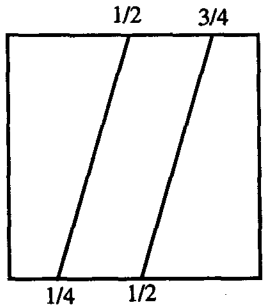
2) العنصـر المحـايد (identity element) : ليكن $\varepsilon : I \longrightarrow X$ بحـيث ان $\varepsilon(t) = x$ لكل $t \in I$. يسمى (بالمسار الثابت على النقطة x ويرمز له بالرمز ε_x يمكن تصوره هو توقف في النقطة x طيلة الفترة الزمنية I) . ليكن f مسارا في X يربط النقطتين y و x. فان يوجد مسارين ثابتين $\varepsilon_y , \varepsilon_x$ بحيث ان

$[\varepsilon_x] . [f] = [f] , [f] . [\varepsilon_y] = [f]$

3) العنصر المعكوس : ليكن f مسارا من x الى y. لنرمز للمسار الذي يربط y مع x بصورة عكسية للمسار f بالرمز f^{-1} ونعرفه بالشكل الأتي : $f^{-1}(t) = f(1-t)$. فان

$[f].[f^{-1}] = [\varepsilon_x] , [f^{-1}].[f] = [\varepsilon_y]$ ، ويسمى f^{-1} معكوس f.

البرهان :1) يكفي ان نبرهن $(f*g)*h \sim f*(g*h)$. ولكن قبل ايجاد اقتران هوموتبي بين هذين المسارين نوضح عملية ايجاد هذا الاقتران كالأتي : نقسم المربع IxI كما في الشكل ادناه :



نقوم بنقل مستقيم قاعدة المربع بحيث ان [0 ,1/4] يعرف عليها المسار f و [1/4 , 1/2] يعرف عليها المسار g والفترة الأخيرة [1/2 ,1] نعرف عليها المسار h وذلك بمضاعفة سرعة المسارين f و g اربعة امثال سرعتهما الأصلية اما سرعة المسار h فتكون ضعف سرعته الأولى اما المستقيم الأعلى للمربع فنقسمه الى ثلاثة أقسام ايضا ويكون القسم الأول من نصيب المسار f وتكون سرعة المسار مضاعفه لسرعته الأولى اما القسمين الثاني والثالث فيكونا من نصيب المسارين g و h وتكون سرعتهما أربعة أمثال سرعتيهما الأصلية ومن هذا التقسيم نعرف اقتران الهوموتبي بين المسارين $f*(g*h), (f*g)*h$ بالشكل الأتي :

$$F(t,s) = \begin{cases} f(4t/(s+1)) & 0 \le t \le (s+1)/4 \\ g(4t - s - 1) & (s+1)/4 \le t \le (s+2)/4 \\ h[(4t - s - 2)/(2 - s)] & (s+2)/4 \le t \le 1 \end{cases}$$

يلاحظ ان $F((s+1)/4, s) = f(1) = g(0)$, $F((s+2)/4, s) = g(1) = h(0)$.

وبهذا فان F اقتران مستمر. اما شروط اقتران الهوموتبي الأخرى تتحقق كالآتي :

$$F(t,0) = \begin{cases} f(4t) & 0 \le t \le 1/4 \\ g(4t-1) & 1/4 \le t \le 1/2 \\ h(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} = ((f*g)*h)(t)$$

$$F(t,1) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ g(2t-2) & 1/2 \le t \le 3/4 \\ h(4t-3) & 3/4 \le t \le 1 \end{cases} = ((f*g)*h)(t)$$

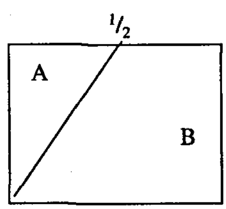
كذلك ان $F(1, s) = h(1)$, $F(0, s) = f(0)$ اذن $(f*g)*h \sim f*(g*h)$. وبهذا ينتهي المطلوب الأول .

2) يكفي ان نبرهن ان $\varepsilon_x * f \sim f$ و $f * \varepsilon y \sim f$.

اولا نعرف الاقتران $F: I\times I \longrightarrow X$ بالشكل التالي :

$$F(t,s) = \begin{cases} x & 0 \le t \le 1/2 \\ f(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

ان تفسير الاقتران اعلاه هو عبارة عن عملية نقل المربع I^2 الى المستقيم I باقتران مستمر ينقل المثلث A الموضح في الشكل ادناه الى النقطة x والشكل الرباعي B الى المستقيم I.

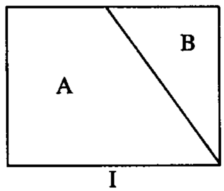


ان الاقتران F مستمر ويحقق شروط اقتران الهوموتبي بين $f * \varepsilon_x$ و f ويترك كتمرين للقارئ .

ثانيا نعرف الاقتران $F : IxI \longrightarrow X$ كالآتي :

$$F(t,s) = \begin{cases} f(2t/(2-s) & 0 \le t \le (2-s)/2 \\ y & (2-s)/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

أي ان الاقتران F يقوم بنقل المربع I^2 الى المستقيم I وذلك بنقل الشكل الرباعي A في الشكل ادناه الى المستقيم I والمثلث B الى النقطة y.



ولغرض بيان انF مستمر عند النقطة $t = (2-s)/2$ نلاحظ $F\{(2-s)/(2-s)\} = f(1) = y$

وبهذا فان F اقتران مستمر ومن ناحية اخرى ان

$$F(t,0) = f(t)\,,\ F(t,1) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ y & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} = (f*\varepsilon_y)(t)$$

كذلك أن $F(0,s) = f(0) = x\,,\ F(1,s) = y.$

وبهذا فأن $f * \varepsilon_x \sim f$وبالتالي نحصل على المطلوب الثاني في المبرهنة .

3) في هذا الجزء يكفي كذلك ان نبرهن $f * f^{-1} \sim \varepsilon_x$ و $f^{-1} * f \sim \varepsilon_y$.

نعرف أول الاقترانX $F : I \times I \longrightarrow$ بالصيغة الآتية :

$$F(t,s) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le s/2 \\ f(s) & s/2 \le t \le 1 - s/2 \\ f(2-2t) & 1 - s/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

واضح ان F اقتران مستمر وان

$$F(t,0)=\begin{cases} f(2t) & 0\le t\le 0 \\ f(0) & 0\le t\le 1 \\ f(2-2t) & 1\le t\le 1 \end{cases} = f(0)=x=\varepsilon_x.$$

$$F(t,1)=\begin{cases} f(2t) & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ f(t) & \frac{1}{2}\le t\le \frac{1}{2} \\ f(2-2t) & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases} = \begin{cases} f(2t) & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ f(2-2t) & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases} = (f^{*} f^{-1})(t).$$

وان $F(0,s)=f(0)=x$, $F(t,1)=f(0)=x$. من هذا نحصل على المطلوب الأول من الجزء الثالث .

اما بالنسبة الى الجزء الثاني فنعرف الاقتران $F: I\times I \longrightarrow X$ بالشكل الأتي :

$$F(t,s)=\begin{cases} f^{-1}(2t) & 0\le t\le s/2 \\ f^{-1}(s) & s/2\le t\le 1-s/2 \\ f^{-1}(2-2t) & 1-s/2\le t\le 1 \end{cases}$$

بسهولة يمكن البرهنة على ان F اقتران مستمر ويحقق شروط اقتران الهوموتبي . وبهذا ينتهي البرهان . #

2.7 الزمرة الهوموتبية الأساسية

مما سبق نلاحظ ان مجموعة صفوف التكافؤ أعلاه مع عملية الضرب التي عرفت على هذه المجموعة والخواص الذي برهنت في المبرهنة الأخيرة تشابه الى حد كبير شروط الزمرة . ولغرض انشاء زمرة على الفضاء التبولوجي لنتذكر أولا تعريف الزمرة بشكل عام وبعض خواصها .

تعريف 1.2.7 : لتكن G مجموعة غير خالية ولتكن * عملية معرفة على المجموعة G فان الثنائي $(G,*)$ يسمى زمرة اذا وفقط اذا تحقق مايلي :

1) لكل عنصرين $a, b\in G$ فان $a * b\in G$.

2) اذا كان a, b, c عناصر في G فان $(a * b) * c = a * (b * c)$. (تسمى هذه الخاصية بالخاصية التجميعية) .

3) يوجد عنصر $e\in G$ بحيث ان لكل $a\in G$ فان $a * e= e * a = a$. يسمى العنصر e بالعنصر المحايد في G.

4) لكل عنصر $a \in G$ يوجد عنصر $a^{-1} \in G$ بحيث ان $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. يسمى a^{-1} بمعكوس العنصر a بالنسبة الى العملية * .

أمثلة :

1) ان مجموعة الأعداد الصحيحة Z مع عملية الجمع الاعتيادية تشكل زمرة ويرمز لها غالبا بالرمز $(Z ,+)$.

2) ان المجموعة {1- , 1} مع عملية الضرب الاعتيادية تشكل زمرة وتكتب بالشكل $(\{1 ,-1\} ,.)$.

3) الثنائي $(R - \{0\} ,.)$ هو الآخر زمرة حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية .

4) الثنائي $(\{[0], [1]\} , +)$ يشكل زمرة ويرمز لها بالرمز Z_2.

مبرهنة 2.2.7 : لتكن $(G ,*)$ زمرة فان :

1) العنصر المحايد e في G يكون وحيد .

2) لكل عنصر a من عناصر G يكون معكوس العنصر a وحيد ايضا .

البرهان : (انظر [I.N.Herstein]صفحة - 33) .

ملاحظة :

من خلال ما طرحناه في الجزء الأول من هذا الفصل نجد ان مجموعة صفوف التكافؤ مع عملية الضرب لا تحقق شروط الزمرة بشكلها الدقيق . حيث ان الشروط التي لا تتحقق هي اولا ان عملية الضرب بين صفوف التكافؤ غير معرفة بشكل عام لجميع صفوف التكافؤ حيث ان الضرب يكون معرف فقط في حالة ان يكون المسار الممثل للصف التكافؤي الأول له نقطة نهاية هي نقطة البداية للصف التكافؤي الثاني كذلك وجدنا ان كل عنصر من مجموعة صفوف التكافؤ يمتلك عنصرين محايدين . للتغلب على هاتين المشكلتين نستبدل المسار الاعتيادي بمسار مغلق الذي سبق وان عرفناه في الفصل الخامس وببساطه هو المسار الذي له نقطة بداية ونهاية واحدة .

تعريف 3.2.7 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا ولتكن x نقطة ما من نقاط X فان مجموعة صفوف التكافؤ للمسارات المغلقة على x يرمز لها بالرمز $\pi (X;x)$.

مبرهنة 4.2.7 : ان المجموعة $\pi(X;x)$ مع عملية الضرب التي عرفت في الجزء الأول تشكل زمرة . تسمى هذه الزمرة بالزمرة الهوموتبية الأساسية الى X على x (وتسمى بعض الأحيان بالزمرة الهوموتبية الأولى ويرمز غالبا لها بالرمز $\pi_1(X;x)$، لذلك سوف نستخدم هذا الرمز بدلا من الرمز $\pi(X;x)$) .

البرهان : ينتج بطريقة مشابه لما ورد في برهان المبرهنة (6.1.7) . #

مثال : ليكن (R^2, T) الفضاء التبولوجي الاقليدي ولتكن $x \in R^2$ فان الزمرة الهوموتبية الأساسية الى R^2 تمثل الزمرة التافه (trivial). أي ان $\pi_1(R^2 ; x) = \{\varepsilon_x\}$.

الحل : ليكن f مسار مغلق على النقطة x في R^2 فان $F(t,s) = s\,x + (1-s)\,f(t)$ يمثل اقترانا هوموتبيا بين f والمسار الثابت ε_x وبهذا فان أي مسار مغلق يكافئ هوموتبيا الى المسار الثابت . اذن $\pi_1(R^2 ; x) = \{\varepsilon_x\}$.

سوف نتعرض الى التعريف التالي لغرض اعطاء مثال آخر على الزمرة الهوموتبية الأساسية .

تعريف 5.2.7 : لتكن X مجموعة جزئية من R^n . تسمى X مجموعة محدبة (convex) اذا وفقط اذا كانت لكل نقطتين x , y من نقاط X فان قطعة المستقيم (line segment) الواصل بين النقطتين x,y تقع كليا في X .

مثال : لتكن X مجموعة محدبة جزئية من R^n فان الزمرة الهوموتبية الأساسية على X لأي نقطة في X تكون الزمرة التافهه .

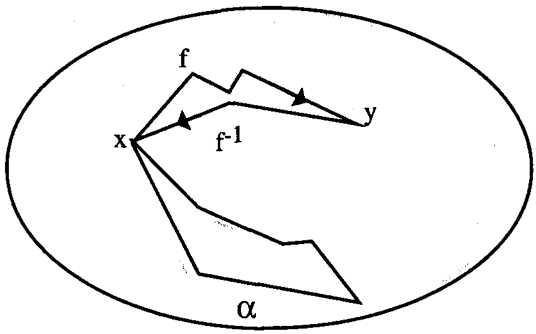
الحل : لتكن $x \in X$ و f مسارا مغلقا على x فان الاقتران المعرف في المثال السابق هو الآخر اقتران هوموتبي بين f والمسار الثابت على x وسبب ذلك لأن لكل نقطة $y \in X$ فان قطعة المستقيم الرابطة بين النقطتين x, y تقع كليا في X أي ان $\{sx + (1-s)y : 0 \le s \le 1\}$ تقع في X وبهذا فان $\pi_1(R^2 ; x) = \{\varepsilon_x\}$.

ولغرض اعطاء مثال لزمرة هوموتبية أساسية ليست تافهه سوف لن يكون بالسهولة كما وردت في الأمثلة السابقة لذا سوف نتعرض لهذا النوع في الجزء القادم من هذا الفصل .

تعريف 6.2.7: ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا و x , y نقطتين من نقاط X بحيث أنه يوجد مسار f يربط x مع y . نعرف $f^* : \pi_1(X;x) \longrightarrow \pi_1(X;y)$ بالشكل الأتي : لكل عنصر $[\alpha] \in \pi_1(X;x)$ فان $f^*([\alpha]) = [f^{-1}] . [\alpha] . [f]$.

مبرهنة 7.2.7 : العلاقة f^* المعرفة اعلاه تمثل اقترانا . أي ان f^* تنقل العنصر $[\alpha]$ من المجموعة $\pi_1 (X;x)$ الى عنصر واحد فقط في $\pi_1 (X;x)$ بغض النظر عن ممثل الصف التكافئي .

البرهان :ليكن α_1 , α_2 ممثلين من الصف التكافئي $[\alpha]$. للبرهنة على ان $f^*([\alpha_1]) = f^*([\alpha_2])$. بما ان $f^*([\alpha_1]) =[f^{-1}] . [\alpha_1] . [f] =[f^{-1} * \alpha_1 * f]$ كذلك $f^*([\alpha_2]) = [f^{-1}] . [\alpha_2] .[f] = [f^{-1} * (\alpha_2* f]$ ومن خلال التعريف السابق وعملية التركيب * ، نحصل على ان $f^{-1} * \alpha_1 *f \sim f^{-1} * \alpha_2 * f$ وبهذا فان f^* اقتران والشكل ادناه يبن ذلك .



في الشكل اعلاه واضح ان α مسار مغلق على x وان f مسار بين x و y. نلاحظ ان المسار المنتقل من y الى x بواسطة f^{-1} والاستمرار بالتحرك على α ثم الرجوع الى y على المسار f يمثل مسارا مغلقا على y وبهذا فان الصف التكافئي $[f^{-1} * \alpha * f]$ ينتمي الى $\pi_1 (X;y)$. #

تعريف 8.2.7 : لتكن كل من $(G ,*)$, $(G', *')$ زمرة فان الاقتران h المعرف من G الى G' يسمى تماثلا اذا وفقط اذا كان لكل نقطتين $a,b \in G$ فان $h (a * b)=h(a) *' h(b)$. واذا كان h اقترانا تقابليا فيسمى تشاكلا .

مبرهنة 9.2.7 : الاقتران $f^*: \pi_1 (X;x) \longrightarrow \pi_1 (X;y)$ المعرف في (6.2.7) تشاكل .

البرهان : نبرهن اولا ان f^* تماثل بين الزمرتين $f^* : \pi_1 (X;x) \longrightarrow \pi_1 (X;y)$. نفرض ان $[\alpha_1]$، $[\alpha_2]$ عنصرين في $\pi_1 (X;x)$ فان

$f^*([\alpha_1]) . f^*([\alpha_2]) = ([f^{-1}] . [\alpha_1] . [f]) . ([f^{-1}] . [\alpha_2] . [f]) =$

$. [f^{-1}] . [\alpha_1] . [\alpha_2] . [f] = [f^{-1}] . [\alpha_1 * \alpha_2] . [f] = f^*([\alpha_1 * \alpha_2]) = f^*([\alpha_1] . [\alpha_2])$

الآن نبين ان f^* اقتران تقابلي . نفرض ان $f^*([\alpha_1]) = f^*([\alpha_2])$ هذا يعني ان $f^{-1} * \alpha_1 * f \sim f^{-1} * \alpha_2 * f$ أي ان $\alpha_1 \sim \alpha_2$ وبذلك فان $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ أي ان الاقتران f^* متباين . أخيرا نفرض ان $[\beta] \in \pi_1 (X;y)$ ونفرض ان $g = f^{-1}$. يلاحظ ان $f^*\beta^*g$ مسار مغلق على النقطة x وان $f^*([f^*\beta^*g]) = [f^{-1}] . [f^*\beta^*g] . [f] = [\beta]$. هذا يؤدي الى ان f^* اقتران تشاكلي . #

ملاحظة : يمكن برهان الاقتران تقابلي في اعلاه بأخذ $g = f^{-1}$ وان $g^*([\beta]) = [g^{-1}] . [\beta] . [g]$ وبسهولة يمكن البرهنة على ان $g^* o f^* = I$ و $f^* o g^* = I$.

نتيجة 9.2.7 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا مترابطا مساريا و x , y نقطتين من نقاط X فان $\pi_1 (X;x) , \pi_1 (X;y)$ متشاكلتان .

البرهان : نفرض ان f مسار بين النقطتين x و y وباستخدام المبرهنة (8.2.7) نحصل على النتيجة المطلوبة . #

نتيجة 10.2.7 : ليكن (X ,T) فضاءا تبولوجيا و A مركبة في X بحيث ان الفضاء الجزئي (A ,T_A) مترابط مساريا فان $\pi_1 (A;x) = \pi_1 (X ; x)$ لكل $x \in A$.

البرهان : ليكن f مسارا مغلقا على النقطة x فان [f] يجب ان تقع كليا في المجموعة A وبهذا فان $\pi_1 (X;x)$ تعتمد على عناصر المركبة A فقط . #

من النتيجة الأخيرة نلاحظ ان الزمرة الهوموتبية على النقطة التي تنتمي الى المركبة مترابطة مساريا في فضاء تبولوجي معين لن تعطينا جميع المعلومات عن باقي الفضاء التبولوجي لذلك من الأفضل ان نتعامل مع الفضاء المترابط مساريا عند دراسة الزمرة الهوموتبية الأساسية .

تعريف 11.2.7 : يسمى الفضاء التبولوجي (X , T) مترابطا بسيطا اذا وفقط اذا كان مترابطا مساريا وان الزمرة الهوموتبية الأساسية $\pi_1 (X;x)$ هي الزمرة التافهه لكل نقطة x تنتمي الى X .

مبرهنة 12.2.7 : ليكن (X , T) فضاءا تبولوجيا مترابطا ترابط بسيط فان لكل مسارين g , f في X بحيث ان $f(0) = g(0) = x$ و $f(1) = g(1) = y$ فان $f \sim g$.

البرهان : يلاحظ ان $f*g^{-1}$ مسار مغلق في X على x . بما ان $\pi_1 (X;x)$ الزمرة التافه فان $f* g^{-1} \sim \varepsilon_x$ وبهذا فان $[f*g^{-1}] = [\varepsilon_x]$ او $[f*g^{-1}] .[g] = [\varepsilon_x] .[g]$ وهذا يعني ان $[(f*g^{-1})*g] = [g]$ لكن $[(f*g^{-1})*g] = [f*(g^{-1}*g)] = [f*\varepsilon_x] = [f]$. اذن $[f] = [g]$ هذا يؤدي الى ان $f \sim g$. #

لغرض بيان بأن الزمرة الهوموتبية الأساسية هي خاصية تبولوجية والتي بدورها تساعدنا على تصنيف بعض الفضاءات التبولوجية الانفة الذكر نتعرض الى التمرين الأتي :

تمرين : ليكن h اقترانا مستمرا من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y, S) بحيث ان $x \in X , h (x) = y$ و $y \in Y$. ليكن f مسارا مغلقا في X على x فان hof مسار مغلق في Y على y.

واضح ان hof اقتران مستمر من I الى Y وان $(hof)(0) = h(f(0)) = h(x) = y$ و $(hof)(1) = hof(1)) = h (x) = y$ هذا يعني ان hof مسار مغلق على y في Y .

تعريف 13.2.7 : ليكن h اقترانا مستمرا من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S) بحيث ان $x \in X , h (x) = y$ و $y \in Y$. نعرف العلاقة h^* من الزمرة الهوموتبية $\pi_1 (X;x)$ الى الزمرة الهوموتبية $\pi_1 (Y;y)$ بالصيغة الأتية :

$h^* ([f]) = [hof]$ لكل $[f] \in \pi_1 (X;x)$.

مبرهنة 14.2.7 : العلاقة h^* اعلاه اقتران تماثل من الزمرة $\pi_1 (X;x)$ الى الزمرة $\pi_1 (Y;y)$.

البرهان : اولا نبرهن ان h^* اقتران . نفرض ان g و f مساران مغلقان متكافئان هوموتبيا على النقطة x في الفضاء X. هذا يؤدي الى وجود اقتران هوموتبي $F : IxI \longrightarrow X$ للمسارين g , f . نعرف الاقتران $hoF: IxI \longrightarrow Y$. واضح ان hoF اقتران مستمر ويحقق شروط اقتران الهوموتبي للمسارين hof, hog. هذا يعني ان h^* اقتران . الآن نبين ان h^* متماثل . لتكن $[f]$, $[g]$ عنصرين من عناصر الزمرة $\pi_1 (X;x)$ فان

$$(f*g)(x) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ g(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

كذلك ان

$$h((f*g)(t)) = \begin{cases} h(f(2t)) & 0 \le t \le 1/2 \\ h(g(2t-1)) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

هذا يؤدي الى ان $ho(f*g) = (hof)*(hog)$. اذن

$h^*([f].[g]) = h^*([f*g]) = [ho(f*g)] = [(hof)*(hog)] = [[hof].[hog] =$

$h^*([f]).h^*([g])$. #

يلاحظ ان اقتران التماثل h^* يعتمد على الاقتران المستمر h واختيار نقطة القاعدة x. كذلك ان الاقتران h^* له ميزتين تتعلق بنظرية الفصائل (Category theory) والمبرهنتان التاليتان تبين هاتين الميزتين :

مبرهنة 15.2.7 : ليكن كل من (X,T) , (Y,S) , (Z,Q) فضاءا تبولوجيا و $f:(X,T) \longrightarrow (Y,S)$, $g:(Y,S) \longrightarrow (Z,Q)$ اقترانيين مستمرين بحيث ان $f(x)=y$ و $g(y)=z$ حيث $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. فان $(gof)^* = g^* o f^*$.

البرهان : بتطبيق التعريف اعلاه لكل $[\alpha] \in \pi_1(X;x)$ فان $I^*([\alpha]) = [Io\alpha] = [\alpha]$. هذا من جهة ومن جهة ثانية ان

$$(g^* o f^*)([\alpha]) = g^*(h^*([\alpha])) = g^*([fo\alpha]) = [go(fo\alpha)].$$

وبهذا فان $(gof)^* = g^* o f^*$. #

مبرهنة 16.2.7: ليكن I الاقتران الذاتي على الفضاء التبولوجي (X,T) فان I^* الاقتران الذاتي المتماثل على الزمرة $\pi_1(X;x)$.

البرهان : واضح ان I^* متماثل وان لكل $[\alpha] \in \pi_1(X;x)$ فان $I^*([\alpha]) = [Io\alpha] = [\alpha]$ هذا يعني ان I^* الاقتران الذاتي على الزمرة $\pi_1(X;x)$. #

نتيجة 17.2.7 : ليكن f اقتران تكافؤ تبولوجي من الفضاء التبولوجي (X,T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S) فان f^* اقتران تشاكل بين الزمرتين $\pi_1(X;x)$, $\pi_1(Y;y)$ بحث $f(x)=y$.

البرهان : بما ان f اقتران تقابلي نفرض ان $g:(Y,S) \longrightarrow (X,T)$ بحيث ان

$gof = I_X, fog = I_Y$ هذا يؤدي الى ان

$(gof)^* = g^* o f^* = I^*_x, (fog)^* = f^* o g^* = I^*_Y$.

اذن f^* , g^* احدهما معكوس الآخر وبهذا فان f^* اقتران تقابلي وبما انه متماثل . اذن f^* اقتران تشاكلي . #

النتيجة الاخيرة تبين ان الفضاءات التبولوجية التي تكون زمرها الهوموتبية الأساسية غير متشاكلة فانها غير متكافئة تبولوجيا .

3.7 حساب الزمرة الهوموتبية الأساسية للدائرة

لغرض حساب الزمرة الهوموتبية الأساسية للدائرة S_1 يجب ان نتطرق الى مفهوم فضاءات التغطية (covering spaces) حيث ان هذا المفهوم يمهد الطريق وبشكل سهل لحساب زمرة الدائرة الهوموتبية .

تعريف 1.3.7 : ليكن p اقترانا مستمرا وشاملا من الفضاء التبولوجي (X,T) الى الفضاء التبولوجي (Y,S). يسمى X فضاء تغطية الى Y اذا وفقط اذا كان لكل نقطة $y \in Y$ توجد مجموعة مفتوحة B تحتوي على y بحيث ان $p^{-1}(B)$ عبارة عن اسرة مجموعات منفصلة $\{A_i\}_{i\in I}$ وان قصور الاقتران p على A_i (لكل $i\in I$) يكون اقتران تكافؤ تبولوجي . كذلك يسمى الاقتران p باقتران التغطية (covering map).

من التعريف اعلاه يلاحظ ان A_i متكافئ تبولوجيا مع B ومتشابه بالشكل أي ان الأسرة $\{A_i\}_{i\in I}$ تمثل شرائح متطابقة على B . كذلك ان $p^{-1}(y)$ يمثل مجموعة من النقاط في X بحيث انها تمتلك التبولوجيا القوية الجزئية المنتجة من T لأن كل مجموعة مفتوحة A_i تتقاطع مع $p^{-1}(y)$ في نقطة واحدة فقط وبهذا فان هذه النقطة تمثل مجموعة مفتوحة في $p^{-1}(y)$.

مثال 1 : ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا وليكن I_X الاقتران الذاتي على X فان I_X اقتران تغطية .

مثال 2 : ليكن (R^2 , T) الفضاء التبولوجي الأقليدي للمستوي وليكن

$p : R^2 \longrightarrow Rx\{0\}$ معرفا بالشكل التالي : $p(x,y) =(x,0)$ لكل $(x,y) \in R^2$ فان p اقتران تغطية و R^2 فضاء تغطية الى $Rx\{0\}$.

مثال 3: لنكن $X =Y x\{1,2,3\}$ وان $p :X \longrightarrow Y$ معرف كالتالي :

$p(x ,i) = x$ لكل $i =1,2,3$ فان p اقتران تغطية و X فضاء تغطية الى Y .

الآن سنتطرق الى مثال آخر يلعب دورا مهما في حساب الزمرة الهوموتبية الأساسية للدائرة .

مثال 4 : ليكن $p : R \longrightarrow S^1$ اقترانا معرفا بالصيغة التالية :

$p(x) = (\cos 2\pi x , \sin 2\pi x)$ فان p اقتران تغطية و R فضاء تغطية الى S^1 .

الحل : لنأخذ B مجموعة جزئية من S^1 ولتكن هذه المجموعة هي احداثيات موجبة . أي ان لكل $(x,y) \in B$ فان $x^2 + y^2 = 1$ والنقطتين x , y موجبتين . واضح ان B مجموعة (فترة) مفتوحة من S^1 . هذا يؤدي الى ان $p^{-1}(B)$ تمثل اسرة الفترات المفتوحة في R والتي على شكل $A_n = (n ,n - 1/4)$ (n عدد صحيح) .

ان مقصور الاقتران p على الفترة المغلق $\overline{A}_n = [n ,n -1/4]$ يكون اقترانا متباينا وسبب ذلك أن الاقتران $\sin 2\pi x$ مطرد (monotonic) . باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى (Intermediate value theorem) نحصل على ان الاقتران p شامل من المجموعة $\overline{A}_n$ الى المجموعة $\overline{B}$. بما ان $\overline{A}_n$ مجموعة متراصة فان $p/\overline{A}_n$ اقتران تكافؤ تبولوجي . وبشكل خاص فان p/A_n اقتران تكافؤ تبولوجي من A_n الى B . ما حصلنا عليه يمكن تطبيقه على الأجزاء الاخرى من S^1 وبهذا فان p اقتران تغطية .

يمكن تصور ما عملناه في حل المثال اعلاه هو عملية لف خط الأعداد على الدائرة بحيث ان كل فترة مغلقة بالشكل $[n ,n - 1]$ تغطي الدائرة مرة واحدة .

الآن نتعرف على مفهوم آخر والذي بدوره يسهل علينا حساب الزمرة الهوموتبية الأساسية للدائرة ونبدأ بالتعريف الأتي :

تعريف 2.3.7 : ليكن p اقترانا من الفضاء التبولوجي (X , T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S) وليكن f اقترانا مستمرا من الفضاء التبولوجي (Z , Q) الى (Y ,S) . يسمى f اقتران رفع (Lifting map) الى f من (Z , Q) الى (X ,T) بحيث ان $pof' = f$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "P"] & \\ Z \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

نلاحظ من التعريف اعلاه أنه ليس بالضرورة وجود مثل هذا الاقتران في جميع الحالات ولكن سوف نبين ان هذا الاقتران موجود للمسارات في حالة ان الاقتران p اقتران تغطية .

مثال : ليكن $p : R \longrightarrow S^1$ اقترانا (كما في المثال رقم (4) السابق) وليكن $f : [0,1] \longrightarrow S^1$ مسارا في S^1 بحيث ان $f(t) = (\cos\pi t , \sin\pi t)$ فان $f(0)= (1 , 0)$.

ليكن $f' : [0,1] \longrightarrow R$ معرف بالشكل الأتي : $f'(t) = t/2$ يلاحظ ان

$(pof')(t) = p(t/2) = (\cos\pi t , \sin\pi t) = f(t)$.

مبرهنة 3.3.7 : ليكن p اقتران تغطية من الفضاء التبولوجي (X ,T) الى الفضاء التبولوجي (Y , S) ولتكن $p(x_0) = y_0$. لكل مسار $f : [0,1] \longrightarrow Y$ يبدأ بالنقطة y_0 يوجد مسار وحيد f' في X يبدأ بالنقطة x_0 بحيث ان f' اقتران رفع الى f.

البرهان : أولا نبين وجود اقتران (مسار) الرفع f' . نبدأ بتقسيم الفترة $[0,1]$ الى n من الأقسام المتساوية بالشكل الأتي $s_0 = 0 , s_1, s_2 , \dots , s_n$ بحيث ان $f([s_i, s_{i+1}])$ يقع كليا في مجموعة مفتوحة B من Y . نعرف $f'(0) = x_o$ ونفرض ان $f'(t)$ معرف في الفترة $[0, s_0]$. الآن نعرف $f'(t)$ على الفترة $[s_i ,s_{i+1}]$ بالشكل الأتي :

(بما ان B مجموعة مفتوحة في Y فان $p^{-1}(B) =\{A_j\}_{j\in J}$ تمثل اسرة من المجموعات المفتوحة والغير متقاطعة في X وان A_j متكافئ تبولوجيا مع B) نعرف $f'([s_i, s_{i+1}]) \subseteq A_j$.

هذا يعني ان $f'(t) = (p|_{A_j})^{-1}(f(t))$. يلاحظ ان f' اقتران مستمر وسبب ذلك أن الاقتران $(p|_{A_j}) : A_j \longrightarrow B$ اقتران تكافؤ تبولوجي . نعرف الاقتران f' باستخدام التعريف اعلاه على الفترة $[0,1]$وبهذا فان f' اقتران مستمر وبالتالي فان f' مسار في X. وبسهولة يمكن

للقارئ ان يتحقق من ان $pof = f'$.

ثانيا نبرهن الآن f'' هو المسار الوحيد الذي يحقق الخاصية التبديلية أي $(pof' = f)$.
نفرض ان f'' مسار آخر يبدأ بالنقطة x_0. هذا يعني ان $f''(0) = f'(0) = x_0$. نفرض ان $f''(t) = f'(t)$ بالفترة $[0,s_1]$. بما ان $f(t)$ معرف كما هو اعلاه بالشكل $(P|_{A_j})^{-1}(f(t))$ وان f'' هو الآخر رفع الى f فان لكل $s_i \le t \le s_{i+1}$ يجب ان يكون $f''(t)$ مجموعة جزئية من $p^{-1}(B) = \cup A_i$. بما ان $f''([s_i,s_{i+1}])$ مجموعة مترابطة وان $\{A_j\}_{j\in J}$ اسرة مجموعات غير متقاطعة . بهذا نحصل على ان المجموعة $f''\ [s_i,s_{i+1}])$ يجب ان تقع كليا في A_j . هذا يؤدي الى ان $f'(t) = f''(t)$ لكل $t \in [s_i,s_{i+1}]$ وبالتالي فان $f' = f''$. #

مبرهنة 4.3.7 : الزمرة الهوموتبية الأساسية للدائرة $\pi_1(S^1; x_o)$ متشاكلة مع الزمرة $(Z,+)$.

البرهان : لتكن $x_0 = (1,0)$ حيث ان $(1,0) \in S^1$. وليكن $p: R \longrightarrow S^1$ اقتران تغطية معرفا بالشكل الآتي $p(x) = (\cos 2\pi x , \sin 2\pi x)$. نفرض ان f مسار مغلق في S^1 يبدأ بالنقطة x_0 . هذا يؤدي الى وجود مسار رفع f' في R بحيث ان $f'(0) = 0$. وبهذا فان $f'(1)$ نقطة تنتمي الى المجموعة $p^{-1}(x_0)$ ، أي ان $f'(1)$ يجب ان يكون عدد صحيح n. ان العدد الصحيح n يعتمد على الصف التكافؤي $[f]$. الآن نعرف $\varphi: \pi_1(S^1;x_o) \rightarrow Z$ بالشكل التالي $\varphi([f]) = n$ لكل $[f] \in \pi_1(S^1;x_0)$ ، ندعي ان φ اقتران تشاكلي .

اولا نبين ان φ اقتران شامل . ليكن n عددا صحيحا ينتمي الى $p^{-1}(x_0)$. اذن يوجد مسار $f': [0,1] \longrightarrow R$ بحيث ان $f(0) = 0$ و $f(1) = n$ سبب ذلك أن R مترابط مساريا .

لنأخذ $f = pof'$ هذا يعني ان f مسار مغلق في S^1 يبدأ بالنقطة $(1,0)$. يلاحظ ان f' اقتران (مسار) رفع الى f وبهذا فان $\varphi([f]) = n$.

ثانيا لبيان أن الاقتران φ متباين . نفرض ان $\varphi([f]) = \varphi([g]) = n$. ليكن كل من f, g مساري رفع الى f, g على التوالي . هذا يؤدي الى انهما مساران في R نقطة بدايتهما هي 0 ، هذا يعني ان $f' \sim g'$ (لأن R مترابط ترابط بسيط). وبالتالي يوجد اقتران هوموتبي F' بين f' و g' . نفرض ان $F = poF'$. هذا يؤدي الى ان F اقتران هوموتبي بين f و g وبهذا فان

$[f] = [g]$. أخيرا سنبرهن ان φ اقتران متماثل . ليكن f, g مسارين مغلقين في S^1 نقطة بدايتهما هي x_0 ولنفرض ان f , g مسارا رفع الى f , g على التوالي في R نقطة بدايتهما هي 0 . ليكن

$f'(1) = n$ و $g'(1) = m$. نعرف المسار h في R بالشكل الأتي :

$$h(t) = \begin{cases} f'(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ n + g'(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

هذا يؤدي الى ان h مسار في R يبدأ بالنقطة 0 . ندعي ان المسار h هو مسار رفع للمسار $f*g$. بما ان $p(n+x) = p(x)$ لأن دورة p (period) هي 2π . هذا يؤدي الى ان

$$p(h(t)) = \begin{cases} p(f(2t)) = f(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ p(n+g(2t-1)) = p(g(2t-1)) = g(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

اذن $pof = f*g$ وهذا يعني ان h مسار رفع الى $f*g$. وبالتالي نحصل على

$\varphi([f*g]) = h(1) = n + m = \varphi([f]) + \varphi([g])$.

وبهذا فان φ اقتران تشاكلي . #

4.7 أسئلة

1- لتكن $X = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$. برهن ان أي مسارين لهما نفس نقطتي البداية والنهاية في X يكونان متكافئين هوموتبيا .

2- لتكن X كما في السؤال الأول محذوفا من X النقطة $(0,0)$. هل ان أي مسارين لهما نفس نقطتي البداية والنهاية متكافئان هوموتبيا ؟ وضح ذلك .

3- ليكن $g: (X, T) \longrightarrow (Y,S)$ اقترانا مستمرا و f_1 , f_2 مسارين في X بحيث ان $f_1 \sim f_2$. برهن ان $gof_1 \sim gof_2$.

4- لتكن X مجموعة محدبة جزئية من R^n . برهن ان أي مسارين في X يمتلكان نفس نقطتي البداية والنهاية يكونان متكافئين هوموتبيا .

5- يسمى الفضاء التبولوجي (X ,T) قابل للانكماش (contractible) اذا وفقط اذا كان كل

مسار مغلق f في X متكافئا هوموتبيا مع المسار الثابت على نفس نقطة القاعدة (أي $f \sim \varepsilon_x$ حيث x نقطة القاعدة الى f) . برهن ان :

1- الفضاء التبولوجي الحقيقي (R, T) قابل للانكماش .

2- الفضاء القابل للانكماش مترابط مساريا .

6- تسمى المجموعة A الجزئية من R^n محدبة نجميا (star convex) اذا وفقط اذا وجدت نقطة $a_0 \in A$ بحيث ان لكل $a \in A$ فان قطعة المستقيم الرابطة بين a_0 و a تقع كليا في A.

1- اعط مثالا لمجموعة جزئية من R^2 تكون محدبة نجميا ولكنها ليست محدبة .

2- اعط مثالا لمجموعة جزئية من R^2 ليست محدبة نجميا .

3- برهن ان المجموعة المحدبة نجميا تكون مترابطة ترابطا بسيطا .

4- برهن ان أي مسارين في مجموعة محدبة نجميا لهما نفس نقطتي البداية والنهاية يكونان متكافئين هوموتبيا .

7- ليكن (Y, T_Y) فضاءا جزئيا من الفضاء التبولوجي (X, T) . يسمى الاقتران $r: X \longrightarrow Y$ اقتران الانضغاط (retraction function) اذا وفقط اذا كان r اقترانا مستمرا و $r(y) = y$ لكل $y \in Y$. برهن ان $r^* : \pi_1(X; y_0) \longrightarrow \pi_1(Y; y_0)$ اقترانا شاملا حيث $y_0 \in Y$ (ملاحظة : استخدم اقتران الاحتواء $i : Y \longrightarrow X$) .

8- برهن ان اقتران التغطية اقتران مفتوح .

9- ليكن كل من $p: X \quad Y$, $p' : X' \quad Y'$ اقتران تغطية . برهن أن $p \times p' : X \times X' \quad Y \times Y'$ اقتران تغطية .

10- ليكن كل من $p: X \quad Y$, $q: Y \quad Z$ اقتران تغطية .

1- اذا كانت $q^{-1}(z)$ مجموعة منتهية لكل $z \in Z$. برهن ان $qop : X \quad Z$ اقتران تغطية .

2- هل يكون الاقتران qop اقتران تغطية بدون الشرط المذكور في اعلاه ؟ وضح ذلك .

11- ليكن $p : X \times Y \quad X$ اقتران اسقاطي . اذا كانت Y تمتلك التبولوجيا القوية . برهن ان p اقتران تغطية .

المصطلحات العلمية

عربي - انجليزي

المصطلحات العلمية

أ

Union	اتحاد
If and only if	اذا وفقط اذا
Family of subsets	اسرة مجموعات جزئية
Indexed family of sets	اسرة مجموعات مرقمة
Least upper bound	أصغر قيد اعلى
Real numbers	أعداد حقيقية
Integer numbers	أعداد صحيحة
Rational numbers	أعداد نسبية
Function	اقتران
Inclusion function	اقتران الاحتواء
Projective function	اقتران اسقاطي
Real function	اقتران حقيقي
Identity function	اقتران ذاتي
Lifting map	اقتران رفع
Surjective function	اقتران شامل
Embedding function	اقتران غمر
Injective function	اقتران متباين
Distance function	اقتران مسافة
Continuous function	اقتران مستمر (متصل)
Closed function	اقتران مغلق
Open function	اقتران مفتوح
Greatest lower bound	اكبر قيد أدنى
Reflexive	انعكاسية

ب

Graph	بيان

ت

trivial	تافه
Commutative	تبديلي
Associative	تجميعي
Distributive	توزيعي
Simply connected	ترابط بسيط
Totally ordered	ترتيب كلي
Composition	تركيب
Isomorphism	تشاكل
One to one correspondence	تطابق
Bijective	تقابلي
Intersection	تقاطع
Equivalence	تكافؤ
	تكافؤ تبولوجي
Equivalence of matrices	تكافؤ متري
Vanish	تلاشي
Homomorphism	تماثل
Extension	تمديد
topology (Usual)Real	تبولوجيا حقيقية (اعتيادية)
Product topology	تبولوجيا الجداء
Quotient topology	تبولوجيا القسمة
Finite complement topology	تبولوجيا المتممات المنتهية
Differential topology	تبولوجيا تفاضلية
Algebraic topology	تبولوجيا جبرية
Indiscrete topology	تبولوجيا ضعيفة
Discrete topology	تبولوجيا قوية
Identification topology	تبولوجيا مماثلة

topology (Induced)Relative	تبولوجيا منتجة

ث

Constant	ثابت
Product	جداء
Partial	جزئي
Neighborhood	جوار

ح

Ring	حلقة

ز

Group	زمرة
Topological group	زمرة تبولوجية
Ordered pair	زوج مرتب

ش

Surjective	شـامل

ص

Equivalence class	صف تكافؤي
Topological Property	صفة تبولوجية
Image	صورة

ض

Anti symmetric	ضد متناظرة

ع

Relation	علاقة
Equivalence relation	علاقة تكافؤ
Partial ordered relation	علاقة ترتيب جزئي
Element	عنصر
identity element	عنصر محايد

غ

Covering	غطاء
Closed covering	غطاء مغلق
Open covering	غطاء مفتوح
Finite covering	غطاء منته
Uncountable	غير قابل للعد
Infinite	غير منته

ف

Interval	فترة
Closed interval	فترة مغلقة
Open interval	فترة مفتوحة
Space	فضاء
Closure space	فضاء الانغلاق
Quotient space	فضاء القسمة
Product space	فضاء الجداء
Topological space	فضاء تبولوجي
Topological subspace	فضاء تبولوجي جزئي
Covering space	فضاء تغطية
Normal space	فضاء عادي
Totally disconnected space	فضاء غير مترابط كليا
Connected space	فضاء مترابط
Locally connected space	فضاء مترابط محليا
Path connected space	فضاء مترابط مساريا
Compact space	فضاء متراص
Locally compact space	فضاء متراص محليا
Metric space	فضاء متري
Regular space	فضاء منتظم

ق

Numerable	قابل للترقيم
Countable	قابل للعد
Base	قاعدة
line segment	قطعة مستقيم
Open disc	قرص مفتوح
Lower bound	قيد أدنى
Upper bound	قيد أعلى
Absolute value	قيمة مطلقة

ك

Open ball	كرة مفتوحة

م

Theorem	مبرهنة
Intermediate value theorem	مبرهنة القيمة الوسطى
Fixed point theorem	مبرهنة النقطة الثابتة
Injective	متباين (أحادي)
Sequence	متتالية
Connected	مترابط
Compact	متراص
Increasing	متزايد
Polynomial	متعددات (كثيرات) الحدود
Transitive	متعدية
Convergent	متقاربة
Homeomorphic	متكافئ تبولوجيا
Complement	متممة
homomorphism	متماثل
Symmetric	متناظرة (متماثلة)

Star Convex	محدبة نجمياً
Domain	مجال
Set	مجموعة
Closure set of A	مجموعة انغلاق A
Index set	مجموعة الدليل
Power set	مجموعة القوى
Derived set	مجموعة المشتقة
Subset	مجموعة جزئية
Exterior set	مجموعة خارجية
Empty set	مجموعة خالية
Interior set	مجموعة داخلية
Universal set	مجموعة شاملة
Convex set	مجموعة محدبة
Boundary set	مجموعة متاخمة
Partially ordered set	مجموعة مرتبة جزئيا
Totally ordered set	مجموعة مرتبة كليا
Closed set	مجموعة مغلقة
Open set	مجموعة مفتوحة
Connected set	مجموعة مترابطة
Locally connected set	مجموعة مترابطة محليا
Path connected set	مجموعة مترابطة مساريا
Compact set	مجموعة متراصة
Locally compact set	مجموعة متراصة محليا
Preserving order---	محافظ على الترتيب
Bounded	محدود
n -tuple	مرتب نوني
Component	مركبة

Path	مسار
Range	مستقر
momotonic	مطردة
Inverse	معكوس
Inverse image	معكوس الصورة
Restriction	مقصور
Finite	منته
Isolated	منعزلة
Theory	نظرية
Category theory	نظرية الفصائل
Point	نقطة
Cluster point	نقطة انغلاق
Initial point	نقطة أبتدائية
base point	نقطة القاعدة
Accumulation point	نقطة تراكم
Limit point	نقطة حدية
Exterior point	نقطة خارجية
Interior point	نقطة داخلية
Generic point	نقطة عامة
Boundary point	نقطة متاخمة
Isolated point	نقطة منعزلة
Single point	نقطة منفردة
point (end)Terminal	نقطة نهائية

هـ

Euclidean geometry	هندسة اقليدية

ي

Belong	ينتمي

المصادر

1- M.A. Armstrong ;Basic topology ; Springer -Verlag ,Bertin Heidelberg ,1997.

2- D. W. Blackett ; Elementary topology ;Academic press , New York ,1967 .

3- R. Brown ;Elements of modern topology ;McGraw Hill (Maidenhead)1968 .

4- George L. Cain ;Introduction to general topology ;Addison - Wesley pub. Com. Inc. 1994.

5- W. G. Chinn &N. E. Steenrod ;First concepts of topology ; New York , Random House ,1966.

6- M. Greenberg ;Lectures on algebraic topology ;New York W. A. Benjamin , Inc. 1967.

7- I.N.Herstein ;Topics in Algebra ;2nd ed. ;John wiley & sons , New York . 1975.

8- S. T. Hu ;Elements of general topology ;Holden Day ,19645 .

9- S. T. Hu ;Introduction to general topology ;Holden Day 1966.

10- J. I. Kelly ;General topology ;Van Nostrand ,New York , 1955.

11-A. P. Morse ;A Theory of sets ;Academic press , 1965.

12- Paul E. Long; An introduction to general Topology; Charles. E. Merrill Pub. Com. 1986.

13- B. Mendelson; Introduction to topology; Dover puble. INC. New York, renewed 1990.

14- James R. Munkres ;Topology a first course ;Prentice Hall Inc. A Simon &Schuster com. Englewood Cliffs ,New Jersey , 1975 .

15 - W. J. Prervin; Foundation of General Topology; Acadimic Press, New York, London. 1964.

16 - G. L. Spencer &D.W. Hall ;Elementary topology ;John Wiley, New York,1955.

17- C. T. C. Wall ;A geometric introduction to topology ;Reading , Mass ; Addison Wesley ,1957.

18- S.Willard ;General topology ;Reading ;Mass ,Addison -Wesley pub. 1970.